https://doi.org/10.36100/dorogimosti2023.28.068

УДК 625.825

Гуляєв В. І., *д-р техн. наук, проф., https://orcid.org/0000-0002-5388-006X*
Шлюнь Н. В., *канд. техн. наук, доц., https://orcid.org/0000-0003-1040-8870*
Національний транспортний університет, м. Київ, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНЬОСТРУКТУРНИХ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ, ЩО ВИКЛИКАЮТЬСЯ ПОЛЯМИ ЗМІННОЇ ТЕМПЕРАТУРИ В КОМПОЗИТАХ ЗІ СТРИЖНЕВОЮ АРМАТУРОЮ

Анотація

Вступ. Термомеханічні ефекти, що виникають в неоднорідних композитних матеріалах під впливом температури, суттєво впливають на міцність і довговічність виготовлених з них конструкцій. Особливий вплив ці ефекти мають на термодеформування мостових та дорожніх конструкцій в умовах сезонних то добових змін температури навколишнього середовища. Вони викликаються неоднорідністю термомеханічних параметрів його фракцій і арматури. До теперішнього часу явища термомеханічного деформування армованих конструкцій вивчена не достатньо, тому задачі їх дослідження є актуальними.

Проблематика. Проблематика виконаних досліджень полягає у встановленні закономірностей термомехнічного деформування композитних матеріалів (включаючи цементобетони й асфальтобетони), які підсилені армуючими стрижнями, в полях змінних температур.

Мета. Мета роботи полягає у виведенні математичних співвідношень, які визначають внутрішньоструктурні термонапруження в композитах, що викликані змінними полями температур і неоднорідністю матеріалів.

Матеріали та методи. У даній роботі на базі положень теорії термопружності поставлена задача про аналітичне дослідження внутрішньоструктурних термонапружень в композитах із стрижневою арматурою під впливом полів змінної температури при умовах термомеханічної несумісності компонент системи. Розроблена математична модель термопружного деформування неоднорідного матеріалу, що містить триточкову систему звичайних диференціальних рівнянь із граничними рівностями на краях області, виділеної для обчислення та на поверхні контакту арматури з матрицею. Методами математичного аналізу побудовано розв'язок цих рівнянь для випадку експоненціального розподілення температури, який є загальним розв'язком рівняння теплопровідності. Сформульовані функції розподілення переміщень і напружень.

Результати. На прикладі асфальтобетонного матеріалу, армованого сталевими стрижнями, побудовані функції розподілення термопереміщень та внутрішьоструктурних термонапружень для різних випадків екпоненціального розподілення температури в системі при типових значеннях термомеханічних характеристик фаз системи.

Висновки. У результаті математичного моделювання встановлено, що в випадках термодеформування композитних матеріалів в змінних полях температури реалізуються два механізми виникнення внутрішньоструктурних термонапружень в системі: внутрішній механізм та градієнтний механізм. Показано, що навіть за порівняно невисоких значеннь температури внутрішньоструктурні термонапруження можуть досягати суттєвих значень. Вони максимальні на контактній поверхні, мають локальний характер і швидко спадають по мірі віддалення від неї. При цьому зі зміною показників експоненти функції зміни температури поля термонапружень мають схильність до суттєвої перебудови. Розглянуті приклади із практики.

Ключові слова: внутрішньоструктурні термонапруження, змінні поля температури, композит, стрижнева арматура.

Вступ

Задача про розподілення термонапружень в циліндричних пружних тілах при температурах, які змінюються в радіальному напрямі, описується звичайними диференціальними рівняннями, розв'язок яких, побудовано в монографії [1]. Ця задача отримує ускладнення, якщо пружне циліндричне тіло (стрижень) знаходиться у пружному середовищі (матриці) та за умови несумісності термомеханічних параметрів фракцій системи (композитного матеріалу) вона зазнає дії температурного поля. Така задача описується триточковою системою звичайних диференціальних рівнянь з додатковими крайовими рівняннями та умовою сполучення функцій на контактній поверхні. Її розв'язок застосовний до частинних аспектів термоміцності композитів зі стрижневою (волокнистою) арматурою побудований в замкненій формі в роботах [1,3,6]. Деякі загальні питання утворення полів термонапружень в композитах обговорюються в статтях [3–5]. В них виділені внутрішній та зовнішній механізми виникнення термонапружень в однорідних та неоднорідних пружних тілах. У роботах [1,3,10] акцентовано, що внутрішній механізм більшою мірою проявляється в композитних матеріалах з несумісними термомеханічними характеристиками їх фаз, причому поля виникнення термонапружень локалізуються в околах армуючих включень.

У той же час в наукових публікаціях суттєву увагу приділяють питанням визначення наведених (ефективних) характеристик композитів та комбінуванню фаз з від'ємними та додатними значеннями коефіцієнтів термічного лінійного розширення з метою доведення їх до нуля [12,13]. При цьому не береться до уваги можливість прояву внутрішнього механізму генерування суттєвих внутрішньоструктурних термонапружень.

Якщо поля температури у пружному середовищі змінюються за просторовими змінними, то виникає можливість прояву ще одного, градієнтного, механізму генерування термонапружень [1, 11]. В композитних матеріалах він реалізується сумісно з внутрішнім механізмом, тому його теоретичне вивчення пов'язано з деякими труднощами. В даній роботі ці ефекти досліджуються методами математичного аналізу з використанням основних положень теорії термопружності [2, 7-9, 13]. Побудовані системи диференціальних рівнянь, отримані їх аналітичні розв'язки. Розглянуті прикладні задачі для асфальтобетонних композитних матеріалів.

Постановка задачі

Розглянемо термопружне деформування пружного циліндричного стрижня 1 радіусу r_1 в пружному середовищі 2 радіусу r_2 (**рис. 1**) за умови, що r_2 може прямувати до ∞.

Нехай варіація $\theta(r)$ температури системи змінюється в радіальному напрямі $\theta(r) = T(r) - T_0$, де $T(r)$ – поточна температура, T_0 – деяке її початкове значення, при якому система не напружена. У поточному стані відносні деформації тіла 1 та середовища 2 в циліндричній системі координат $Or\varphi z$ складають [1,2]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{(1)}(r) &= \frac{1}{E_1}\left[\sigma_r^{(1)} - \nu_1\left(\sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right)\right] + \alpha_1\theta(r),\\
\varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{1}{E_1}\left[\sigma_\varphi^{(1)} - \nu_1\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right)\right] + \alpha_1\theta(r),\\
\varepsilon_r^{(2)}(r) &= \frac{1}{E_2}\left[\sigma_r^{(2)} - \nu_2\left(\sigma_\varphi^{(2)} + \sigma_z^{(2)}\right)\right] + \alpha_2\theta(r),\\
\varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{1}{E_2}\left[\sigma_\varphi^{(2)} - \nu_2\left(\sigma_r^{(2)} + \sigma_z^{(2)}\right)\right] + \alpha_2\theta(r).
\end{aligned} \tag{1}$$

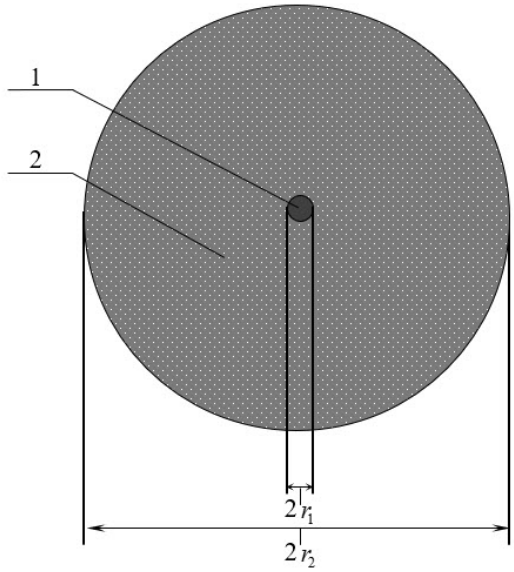

Рисунок 1 – Геометрична схема пружного стрижня 1, включеного у пружне середовище 2

Приймемо, що

$$\varepsilon_z^{(1)}(r)=\varepsilon_z^{(2)}(r)=0 \qquad \sigma_z^{(1)}(r)=\nu_1\left(\sigma_r^{(1)}+\sigma_\varphi^{(1)}\right)-E_1\alpha_1\theta, \quad \sigma_z^{(2)}(r)=\nu_2\left(\sigma_r^{(2)}+\sigma_\varphi^{(2)}\right)-E_2\alpha_2\theta. \quad (2)$$

З системи рівнянь (1), (2) випливає:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)}&=\frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\left[(1-\nu_i)\varepsilon_r^{(i)}+\nu_i\varepsilon_\varphi^{(i)}-(1+\nu_i)\alpha_i\theta\right],\\ \sigma_\varphi^{(i)}&=\frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}\left[(1-\nu_i)\varepsilon_\varphi^{(i)}+\nu_i\varepsilon_r^{(i)}-(1+\nu_i)\alpha_i\theta\right] \quad (i=1,2).\end{aligned} \quad (3)$$

Напишемо також рівняння рівноваги при осьовій симетрії:

$$\frac{d\sigma_r^{(i)}}{dr}+\frac{2_r^{(i)}-\sigma_\varphi^{(i)}}{r}=0 \quad (i=1,2) \quad (4)$$

та додамо до них рівняння для відносних деформацій:

$$\varepsilon_r^{(i)}=\frac{du^{(i)}}{dr}, \qquad \varepsilon_\varphi^{(i)}=\frac{u^{(i)}}{r}, \qquad (i=1,2). \quad (5)$$

Використовуючи наведені співвідношення, можна побудувати систему двох неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d\left(u^{(i)}r\right)}{dr}\right]=\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\alpha_i\frac{d\theta}{dr} \quad (i=1,2). \quad (6)$$

Після її двократного інтегрування отримаємо:

$$u^{(1)}(r)=\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r}\int_0^r\theta\rho d\rho+C_1r+\frac{C_2}{r}\qquad(0\le r\le r_1),$$
$$u^{(2)}(r)=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+C_3r+\frac{C_4}{r}\qquad(r_1\le r\le r_2),\tag{7}$$

де $C_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ – константи інтегрування, які знаходяться з крайових умов:

$$u^{(1)}(0)=0,\tag{8}$$
$$u^{(1)}(r_1)=u^{(2)}(r_1),\tag{9}$$
$$\sigma_r^{(1)}(r_1)=\sigma_r^{(2)}(r_1),\tag{10}$$
$$\sigma_r^{(2)}(r)\to 0\ \text{при}\ r\to\infty.\tag{11}$$

З рівнянь (7), (8) випливає, що для триточкової крайової задачі, що розглядається

$$C_2=0.\tag{12}$$

Щоб скористатися умовами (9) – (11), перепишемо рівняння (5) у вигляді:

$$\varepsilon_r^{(1)}(r)=-\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r^2}\int_0^r\theta\rho d\rho+C_1+\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\alpha_1\theta,$$
$$\varepsilon_\varphi^{(1)}(r)=\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r^2}\int_0^r\theta\rho d\rho+C_1\qquad(0\le r\le r_1),$$
$$\varepsilon_r^{(2)}(r)=-\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+C_3-\frac{1}{r^2}C_4+\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\alpha_2\theta,\tag{13}$$
$$\varepsilon_\varphi^{(2)}(r)=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+C_3+\frac{C_4}{r^2}\qquad(r_1\le r\le r_2).$$

За їх допомогою представимо вирази для термонапружень:

$$\sigma_r^{(1)}(r)=-\frac{E_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r^2}\int_0^r\theta\rho d\rho+\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}C_1,$$
$$\sigma_\varphi^{(1)}(r)=\frac{E_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r^2}\int_0^r\theta\rho d\rho+\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}C_1-\frac{E_1\alpha_1\theta}{(1-\nu_1)},$$
$$\sigma_r^{(2)}(r)=-\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}C_3+\frac{E_2}{(1+\nu_2)}\frac{1}{r^2}C_4,\tag{14}$$
$$\sigma_\varphi^{(2)}(r)=\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}C_3+\frac{E_2}{(1+\nu_2)}\frac{1}{r^2}C_4-\frac{E_2}{(1-\nu_2)}\alpha_2\theta.$$

Використовуючи рівності (7), (14), представимо умови (9) – (11) у формі:

$$r_1 C_1 - r_1 C_3 - \frac{1}{r_1} C_4 = -\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r_1}\int_0^{r_1}\theta\rho d\rho, \tag{15}$$

$$\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} C_1 - \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} C_3 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)}\frac{1}{r_1^2} C_4 = \frac{E_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r_1^2}\int_0^{r_1}\theta\rho d\rho, \tag{16}$$

$$-\frac{E_2}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{r}\theta\rho d\rho C_1 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} C_3 - \frac{E_2}{(1+\nu_2)}\frac{1}{r^2} C_4 \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{17}$$

З умови (17) випливає

$$C_3 = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{+\infty}\theta\rho d\rho \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{18}$$

і системи рівнянь (15), (16) зводяться до вигляду

$$\begin{aligned} &C_1 - \frac{1}{r_1^2} C_4 = -\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r_1^2}\int_0^{r_1}\theta\rho d\rho + \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{+\infty}\theta\rho d\rho, \\ &\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} C_1 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)}\frac{1}{r_1^2} C_4 = \frac{E_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r_1^2}\int_0^{r_1}\theta\rho d\rho + \frac{E_2}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{+\infty}\theta\rho d\rho \text{ при } 8\ r \to \infty. \end{aligned} \tag{19}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1, \qquad a_{12} = -\frac{1}{r_1^2}, \\ &a_{21} = \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \qquad a_{22} = \frac{E_2}{(1+\nu_2)}\frac{1}{r_1^2}, \\ &b_1 = -\frac{(1+\nu_1)}{(1-\nu_1)}\frac{\alpha_1}{r_1^2}\int_0^{r_1}\theta\rho d\rho + \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{+\infty}\theta\rho d\rho, \\ &b_2 = \frac{E_1}{(1-\nu_1)}\frac{\alpha_1}{r_1^2}\int_0^{r_1}\theta\rho d\rho + \frac{E_2}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{+\infty}\theta\rho d\rho. \end{aligned} \tag{20}$$

Використовуючи їх, знаходимо значення констант:

$$\begin{aligned} &C_1 = \frac{(b_1 a_{22} - b_2 a_{12})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}, \\ &C_2 = 0, \\ &C_3 = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^{r}\theta\rho d\rho \ \text{ при } \ r \to \infty, \\ &C_4 = \frac{(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}, \end{aligned} \tag{21}$$

а потім переміщень (7) та термонапружень (14). При цьому вирази для переміщень (7) зводяться до вигляду:

$$u_1(r)=\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r}\int_0^r\theta\rho d\rho+r\frac{(b_1a_{22}-b_2a_{12})}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})},$$
$$u_2(r)=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+r\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+\frac{1}{r}\frac{(a_{11}b_2-a_{21}b_1)}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\quad\text{при } r\to\infty. \tag{22}$$

Запишемо також співвідношення для термонапружень:

$$\sigma_r^{(1)}(r)=-\frac{E_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r^2}\int_0^r\theta\rho d\rho+\frac{E_1(b_1a_{22}-b_2a_{12})}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})},$$
$$\sigma_\varphi^{(1)}(r)=\frac{E_1}{1-\nu_1}\frac{\alpha_1}{r^2}\int_0^r\theta\rho d\rho+\frac{E_1(b_1a_{22}-b_2a_{12})}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}-\frac{E_1\alpha_1\theta}{(1-\nu_1)},$$
$$\sigma_r^{(2)}(r)=-\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^\infty\theta\rho d\rho+\frac{E_2(a_{11}b_2-a_{21}b_1)}{r^2(1+\nu_2)(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}, \tag{23}$$
$$\sigma_\varphi^{(2)}(r)=\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^r\theta\rho d\rho+\frac{E_2}{1-\nu_2}\frac{\alpha_2}{r^2}\int_{r_1}^\infty\theta\rho d\rho+\frac{E_2(a_{11}b_2-a_{21}b_1)}{r^2(1+\nu_2)(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}-\frac{E_2}{(1-\nu_2)}\alpha_2\theta.$$

На відміну від випадку полів постійної температури [6] при температурі, що змінюється за просторовими змінними напруження $\sigma_r^{(1)}(r)$ та $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$ залежать від r, а напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ містять доданок, що спадає пропорційно величині r^{-2}, та доданок, у явній формі, що залежить від θ.

Аналіз числових результатів

У якості прикладу розглянемо випадок, коли сталевий армуючий стрижень 1 додали в асфальтобетонну матрицю 2. Значення термомеханічних параметрів цих фракцій складають: E_1 = 200 ГПа, λ_1 = 115 ГПа, μ_1 = 76,5 ГПа, ν_1 = 0,3, $\alpha_1 = 1\cdot10^{-5}$ °C^{-1}, r_1 = 0,004 м, E_2 =2,4 ГПа, λ_2 = 1,38 ГПа, μ_2 = 0,923 ГПа, ν_2 = 0,3, $\alpha_2 = 2\cdot10^{-5}$ °C^{-1}, r_1 = 0,004 м.

Нехай приріст температури дорівнює (**рис. 2**).

$$\theta(r)=\theta_0+ae^{-br}. \tag{24}$$

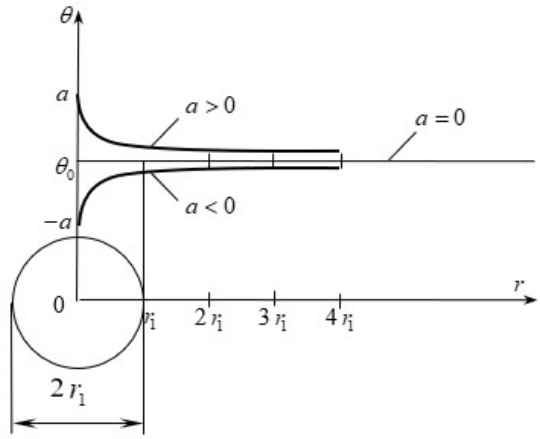

Рисунок 2 – Схема розподілення приросту температури $\theta(r)$ у пружній системі

Експоненціальну зміну функції $\theta(r)$ у вигляді (24) вибрано у зв'язку з тим, що експонента являє собою один з найбільш зустрічних частинних розв'язків рівняння теплопровідності. На **рис. 2**, побудованому при $b > 0$, максимальне значення $\theta(r)$ має місце на осі включення 1 при $a > 0$ і далі воно спадає за експонентою, наближуючись до горизонталі $\theta(r) = \theta_0$. При $a < 0$ функція $\theta(r)$ має найбільше значення на осі Or.

Відмітимо, що для функції температури вигляду (24) її градієнт є змінним вектором, тому в даному випадку до внутрішнього механізму зародження термонапружень додається також Градієнтний механізм.

Для обчислення термонапружень (23) необхідно в рівняння (20) підставити інтеграли $\int_0^r \theta\rho d\rho$ і $\int_{r_1}^r \theta\rho d\rho$. Перший інтеграл обчислюють за допомогою формули інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}&\int_0^r \theta(\rho)\rho d\rho = \int_0^r \left(\theta_0 + ae^{-br}\right)\rho d\rho = \frac{\theta_0 r^2}{2} + a\int_0^r e^{-br}\rho d\rho = \frac{\theta_0 r^2}{2} - \frac{a}{b}\int_0^r \rho d\left(e^{-br}\right) = \\ &= \frac{\theta_0 r^2}{2} - \frac{a}{b}\rho e^{-br}\Big|_0^r + \frac{a}{b}\int_0^r e^{-br} d\rho = \frac{\theta_0 r^2}{2} - \frac{a}{b}e^{-br} r - \frac{a}{b^2}e^{-br} + \frac{a}{b^2} \quad (0 \le r \le r_1).\end{aligned} \tag{25}$$

Аналогічно обчислюється другий інтеграл:

$$\int_{r_1}^r \theta(\rho)\rho d\rho = \int_{r_1}^r \left(\theta_0 + ae^{-br}\right)\rho d\rho = \frac{\theta_0\left(r^2 - r_1^2\right)}{2} - \frac{a}{b}re^{-br} + \frac{a}{b}r_1 e^{-br_1} - \frac{a}{b^2}e^{-br} + \frac{a}{b^2}e^{-br_1} \quad (r \ge r_1). \tag{26}$$

Підставляючи ці значення в праві частини рівностей для функцій $b_1(r)$, $b_2(r)$ в (20), обчислюємо значення констант $C_i\left(i = \overline{1,4}\right)$ в (21), а потім і напруження $\sigma_r(r)$ та $\sigma_\varphi(r)$ за формулами (23). Зазвичай внутрішньоструктурні термонапруження мають найбільше значення на інтерфейсній поверхні $r = r_1$.

Тоді

$$\begin{aligned}&\int_0^r \theta(\rho)\rho d\rho = \frac{\theta_0 r_1^2}{2} - \frac{a}{b}\left(r_1 + \frac{1}{b}\right)e^{-br_1} + \frac{a}{b^2}, \\ &\int_{r_1}^r \theta(\rho)\rho d\rho - \int_{r_1}^{r_1} \theta(\rho)\rho d\rho = 0, \\ &\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^r \theta(\rho)\rho d\rho = \frac{\theta_0}{2} \text{ при } r \to \infty.\end{aligned} \tag{27}$$

При цьому

$$C_3 = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{2(1-\nu_2)}\alpha_2\theta_0. \tag{28}$$

Розглянемо випадок $\theta_0 = -20$ °C, $a = \pm 5$ °C при $b = 100$; 200 та 300 м$^{-1}$. Значення температури $\theta(r)$ у вибраних точках на осі Or при $r_1 = 0{,}004$ м наведені в ***табл. 1***.

Таблиця 1

Значення температури в характерних точках системи

a, °C		b = 100 м$^{-1}$	b = 200 м$^{-1}$	b = 300 м$^{-1}$
a = 5	$\theta(r)$, °C	–15	–15	–15
	$\theta(r_1)$, °C	–16,65	–17,76	–18,49
	$\theta(2r_1)$, °C	–17,76	–18,99	–19,54
a = 0	$\theta(r)$, °C	–20	–20	–20
	$\theta(r_1)$, °C	–20	–20	–20
	$\theta(2r_1)$, °C	–20	–20	–20
a = –5	$\theta(r)$, °C	–25	–25	–25
	$\theta(r_1)$, °C	–23,35	–22,24	–21,51
	$\theta(2r_1)$, °C	–22,24	–21,00	–20,45

З цих даних випливає, що найбільші значення градієнта температури $\theta(r)$ реалізуються у зоні інтерфейсної поверхні $r = r_1$. У цих же зонах мають місце і найбільші значення термонапружень.

Значення констант $C_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ за вибраних параметрів системи наведені в **табл. 2**.

Таблиця 2

Значення констант інтегрування

a, °C	b, м$^{-1}$	C_1	C_2	C_3	C_4
a = 5	100	–8,1458	0	–14,857	$-1{,}006 \cdot 10^{-4}$
	200	–6,4616	0	–14,857	$-1{,}184 \cdot 10^{-4}$
	300	–6,6972	0	–14,857	$-1{,}317 \cdot 10^{-4}$
a = 0		–7,5528	0	–14,857	$-1{,}802 \cdot 10^{-4}$
a = –5	100	–8,9578	0	–14,857	$-2{,}549 \cdot 10^{-4}$
	200	–8,6439	**0**	–14,857	$-2{,}421 \cdot 10^{-4}$
	300	–8,4084	0	–14,857	$-2{,}287 \cdot 10^{-4}$

Обчислені за таких даних термонапруження на поверхні $r = r_1$ тіла 1 та середовища 2 подані в **табл. 3**. Аналіз цих результатів дозволяє зробити висновок, що при, навіть, порівняно невеликому однаковому прирості температури (a = 0 °C, θ = –20 °C) в арматурі 1 та матриці 2 напруження в асфальтобетонному середовищі складають десятки процентів від значення її границі міцності при розтягуванні, яке може бути в 5 – 6 разів менше його границі міцності при стисканні. Крім того при a = 5 °C напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ та $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ мають різні знаки. Це означає, що напруження розтягування в асфальтобетоні при a = 5 °C реалізуються у будь-якому випадку. Відмітимо, що при спільній дії термічного та транспортного навантаження ці термонапруження можуть виявитися критичними.

Таблиця 3

Значення термонапружень в тілі 1 та середовищі 2 на поверхні $r = r_1$

a, °C	b, м$^{-1}$	$\sigma_r^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$, МПа
$a = 5$	100	–0,5696	0,8518	–0,5696	0,3399
	200	–0,5491	1,5870	–0,5491	0,3955
	300	–0,5339	1,8457	–0,5339	0,4301
$a = 0$		–0,4777	–0,4777	–0,4777	0,4777
$a = –5$	100	–0,3858	–1,8059	–0,3858	–0,29989
	200	–0,4063	–2,5424	–0,4063	–0,2794
	300	–0,4218	–2,8115	–0,4218	–0,2639

При $a = –5$ °C всі напруження є стискаючими, оскільки вони від'ємні. Однак ця обставина також не покращує ситуацію, оскільки при зміні напрямку теплообмінного режиму вона змінюється на обернену.

Ефект Градієнтного механізму ініціювання внутрішньоструктурних термонапружень, що здійснюється в даному випадку, може супроводжуватись, також тим, що тут можуть втрачатися умови для прояву принципу Сен-Венана. Це зумовлено тим, що температура системи виявляється змінною у всіх її точках, градієнт температури ніде не дорівнює нулю, та термонапруження, що ним викликаються, можуть також не прямувати до нуля (або прямувати до нуля дуже повільно) при віддалені від джерела термічного збурення.

Висновки

1. Поставлена задача про теоретичне моделювання явища зародження внутрішньоструктурних термонапружень в композитному матеріалі, що містить стрижневу арматуру з відмінними термомеханічними параметрами, при дії термічного збурення вздовж радіальної координати.

2. Сформульована триточкова система звичайних диференціальних рівнянь з додатковими умовами на краях області визначення розв'язку та константними рівняннями сумісності розв'язків на інтерфейсній поверхні. Побудовано розв'язок цієї системи, знайдені функції переміщень, деформацій і напружень для випадку зміни температури системи вздовж радіальної координати за експоненціальним законом.

3. Аналіз цих розв'язків свідчить про те, що поля термонапружень в системі в значній мірі визначаються показниками експоненти температури та їх вклад в термопошкодження системи може бути помітним.

Список літератури

1. Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Густєлєв О.О., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружний стан багатошарових дорожніх покриттів. Київ, НТУ, 2018. 252 с.

2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости: Киев, 1970. 239 с.

3. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О. Про внутрішній механізм термопошкоджень в армованих композитах з термомеханічною несумісністю їх фаз. *Вісник НТУ. Серія «Технічні науки»*. Київ, НТУ, 2022. Вип. 3 (53). С. 427–432.

4. Elwardany M.D., King G., Planche J.P., Rodezno C., Christensen D., Fertig Ill R.S., Kuhn K.H., Bhuiyan F.H. Internal restraint damage mechanism for age-induced pavement surface damage. *Asphalt Paving Technol: J. Assoc. Asphalt Paving Technol*. 2019. 88 c.

5. Elwardany M., Planche J.-P., King G. Universal and practical approach to evaluate asphalt binder resistance to thermally-induced damage. *Construction and Building Materials*. 2020. 255, 119331. P. 1–18.

6. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V. Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. System Research and Information Technologies. 2022. 2. P. 117–127.

7. Hetnarski R.B., Eslomi M.R. Thermalstress – Advanced Theory and Applications Springer Scieience Business Media B.V. 2009.

8. Noda, N., Hetnarski, R.B. and Tanigawa, Y. Thermal Stresses. 2nd edition, New York: Taylor and Francis. 2003.

9. Nowacki W. Thermoelasticity, 2 nd ed. Oxford: PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw and Pergamon Press. 1986.

10. Rozen W., Ketler E., Hashin Z., Hollow glass fibre reinforced plastics. General Electric Missile & Space devision. Philadelphia, 1962.

11. Setiawan Dian M. The role of temperature differential and subgrade quality stress, curling, and deflection behavior of rigid pavement. Journal of the mechanical behavior of Materials. 2011. V.29, Issue 5-6. id.10,12 p.

12. Takenaka K., Negative Thermal Expansion Materials: Technological Key for Control of Thermal Expansion. *Science and Technology of Advanced Materials*. 2012. Vol. 13. P. 1–11. DOI: 10.1088/1468-6996/13/1/013001.

13. Trussdell C. Carson D.E. Thermoelasticity, Encyclopedia of Physics, Vol.via/2, Berlin, spring, 1972.

References

1. Huliaiev V.I., Haidaichuk V.V., Mozghovyi V.V., Hustieliev O.O., Zaiets Yu.O., Shevchuk L.V., Shliun N.V. Termopruzhnyi stan bahatosharovykh dorozhnikh pokryttiv [Thermoelastic state of multilayer road surfaces]. Kyiv, NTU, 2018. 252 p. [in Ukrainian].

2. Kovalenko A.D. Osnovy termoupruhosty [Fundamentals of thermoelasticity]. Kyiv, 1970. 239 p. [in Russian].

3. Shliun N.V., Zaiets Yu.O. Pro vnutrishnii mekhanizm termoposhkodzhen v armovanykh kompozytakh z termomekhanichnoiu nesumisnistiu yikh faz [On the internal mechanism of thermal damage in reinforced composites with thermomechanical incompatibility of their phases]. *Visnyk NTU. Seriia «Tekhnichni nauky»*. Kyiv, NTU, 2022. Iss. 3 (53), P. 427–432 [in Ukrainian].

4. Elwardany M.D., King G., Planche J.P., Rodezno C., Christensen D., Fertig Ill R.S., Kuhn K.H., Bhuiyan F.H. Internal restraint damage mechanism for age-induced pavement surface damage. Asphalt Paving Technol: J. Assoc. Asphalt Paving Technol. 2019. 88 p. [in English].

5. Elwardany M., Planche J.-P., King G. Universal and practical approach to evaluate asphalt binder resistance to thermally-induced damage. *Construction and Building Materials*. 2020. 255, 119331. P. 1–18 [in English].

6. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V. Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. *System Research and Information Technologies*. 2022. 2. P.117–127. 403 DOI: https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09 [in English].

7. Hetnarski R.B., Eslomi M.R. Thermalstress – Advanced Theory and Applications Springer Scieience Business Media B.V., 2009 [in English].

8. Noda, N., Hetnarski, R.B. and Tanigawa, Y. Thermal Stresses. 2nd edition, New York: Taylor and Francis. 2003 [in English].

9. Nowacki W. Thermoelasticity, 2 nd ed. Oxford: PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw and Pergamon Press. 1986 [in English].

10. Rozen W., Ketler E., Hashin Z., Hollow glass fibre reinforced plastics. General Electric Missile & Space devision. Philadelphia, 1962 [in English].

11. Setiawan Dian M. The role of temperature differential and subgrade quality stress, curling, and deflection behavior of rigid pavement. Journal of the mechanical behavior of Materials. 2011. V.29. Issue 5-6, id.10,12 p. [in English].

12. Takenaka K., Negative Thermal Expansion Materials: Technological Key for Control of Thermal Expansion. Science and Technology of Advanced Materials. 2012. Vol. 13. P. 1–11. DOI: 10.1088/1468-6996/13/1/013001 [in English].

13. Trussdell C. Carson D.E. Thermoelasticity, Encyclopedia of Physics, Vol.via/2, Berlin, spring, 1972 [in English].

Valerii Gulyayev, *D.Sc., Prof., https://orcid.org/0000-0002-5388-006X*
Nataliia Shlyun, *Ph.D., Associate Prof., https://orcid.org/0000-0003-1040-8870*
National Transport University (NTU), Kyiv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELING OF INTERNAL STRUCTURAL THERMAL STRESSES CAUSED BY VARIABLE TEMPERATURE FIELDS IN COMPOSITES WITH ROD REINFORCEMENT

Abstract

Introduction. Thermomechanical effects arising in heterogeneous composite materials under the influence of temperature significantly affect the strength and durability of structures made of them. These effects have a special influence on the thermal deformation of bridge and road structures under conditions of seasonal and daily changes in ambient temperature. They are caused by non-uniformity of the thermomechanical parameters of its fractions and fittings. Until now, the phenomenon of thermomechanical deformation of reinforced structures has not been sufficiently studied, therefore the tasks of their research are urgent.

Problem Statement. The problem of the performed research is to establish the laws of thermomechanical deformation of composite materials (including cement concrete and asphalt concrete), which are reinforced with reinforcing rods, in the fields of variable temperatures.

Purpose. The purpose of the work is to derive mathematical ratios that determine intrastructural thermal stresses in composites caused by variable temperature fields and heterogeneity of materials.

Materials and methods. In this work, based on the provisions of the theory of thermoelasticity, the task of analytical research of intrastructural thermal stresses in composites with rod reinforcement under the influence of variable temperature fields under conditions of thermomechanical incompatibility of the

system components is set. A mathematical model of thermoelastic deformation of a non-homogeneous material has been developed, containing a three-point system of ordinary differential equations with boundary equalities at the edges of the area selected for calculation and on the surface of the contact of the reinforcement with the matrix. The solution of these equations for the case of exponential temperature distribution, which is the general solution of the heat conduction equation, was constructed using the methods of mathematical analysis. Displacement and stress distribution functions are formulated.

Results. On the example of asphalt concrete material reinforced with steel rods, distribution functions of thermal displacements and intrastructural thermal stresses are constructed for various cases of exponential temperature distribution in the system at typical values of the thermomechanical characteristics of the system phases.

Conclusions. As a result of mathematical modeling, it was established that in cases of thermal deformation of composite materials in variable temperature fields, two mechanisms of the occurrence of intrastructural thermal stresses in the system are implemented: the internal mechanism and the gradient mechanism. It is shown that even at relatively low temperature values, intrastructural thermal stresses can reach significant values. They are maximal on the contact surface, have a local character and rapidly decrease with distance from it. At the same time, with a change in the exponents of the function of the temperature change, the field of thermal stresses has a tendency to be significantly rearranged. Examples from practice are considered.

Keywords: infrastructural thermal stresses, variable temperature fields, composite, rod reinforcement..