

ДЕФОРМАЦИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Азизов Т.Н.

Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины

Срибняк Н.Н.

Сумской национальный аграрный университет

Анализ публикаций и постановка задачи.

В плитно-ребристых системах, к которым относятся мостовые конструкции, ребристые сборные и монолитные перекрытия, в момент, когда нормальные трещины раскрыты достаточно широко, пространственные трещины кручения могут отсутствовать. В то же время перераспределение нагрузки между смежными ребрами, а также между отдельными сборными элементами перекрытия зависят не только от изгибной, но и от крутильной жесткости ребер [2].

Экспериментальными исследованиями [4] показано, что жесткость ребер сборных плит на кручение изменяется при трещинообразовании, хотя в отдаленных от опор участках вообще не возникают пространственные трещины кручения.

Существующие методики определения жесткости на кручение [5, 6] касаются только железобетонных элементов с пространственными (спиральными) трещинами.

Основной задачей при определении крутильной жесткости является вычисление перемещений в торце прямоугольного элемента, только к части которого приложен крутящий момент [1]. При этом, однако, если использовать «двухстержневую» модель [1], может страдать точность расчетов.

В связи с этим целью настоящей статьи является совершенствование методики определения перемещений железобетонного элемента прямоугольного сечения с нормальными трещинами, торец которого загружен крутящим моментом на части сечения.

Изложение методики. Рассмотрим железобетонный элемент с нормальными трещинами (рис. 1).

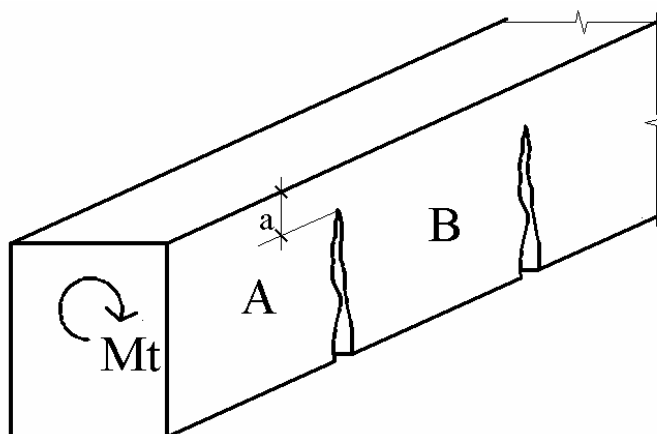


Рис. 1. Схема железобетонного элемента с нормальными трещинами, нагруженного крутящим моментом

Передача крутящего момента от блока A к блоку B (рис. 1) происходит через сжатую зону бетона. Для определения жесткости железобетонного элемента с нормальными трещинами при действии крутящего момента требуется определить перемещения блока A относительно блока B . При этом схема приложения крутящего момента к блоку B выглядит так, как показано на рис. 2.

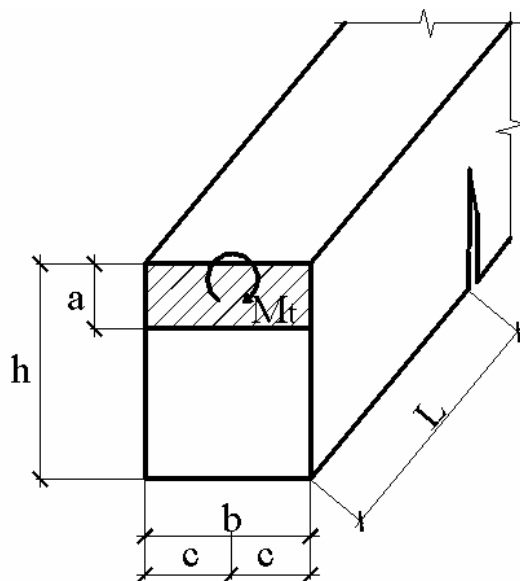


Рис. 2. Схема передачи крутящего момента через сжатую зону бетона

Задача теории упругости о кручении стержня прямоугольного сечения, как известно, решается в предположении, что торец стержня равномерно загружен касательными силами, равнодействующая которых приводится к крутящему моменту M_t . При схеме приложения момента по рис. 2 на части сечения напряжения и перемещения не могут быть определены по формулам кручения.

Такая задача может быть решена с помощью метода конечных элементов (МКЭ) с применением объемных конечных элементов (КЭ). Однако, трудности использования объемных КЭ общеизвестны, тем более, когда речь идет о том, что данная задача является только частью решения более общей задачи определения крутильной жесткости железобетонного элемента с трещинами.

Для решения задачи воспользуемся методикой [1] с той разницей, что рассмотрим деление стержня не на две части, а на произвольное их число.

Схема загрузки блока B (на рис. 1) и его деление на отдельные полосы выглядит так, как показано на рис. 3.

Проведем n горизонтальных сечений, параллельных плоскости OXY (рис. 3), и получим $n+1$ полос (стержней).

Ввиду симметрии загрузки блока по рис. 3 схему загрузки i -того стержня с учетом аналогии с [1] можно представить в виде, показанном на рис. 4.

Природа вертикальных усилий $S_i(x)$ и касательных $\tau_i(x)$ поясняется в [1], и поэтому здесь на дополнительных пояснениях останавливаться не будем.

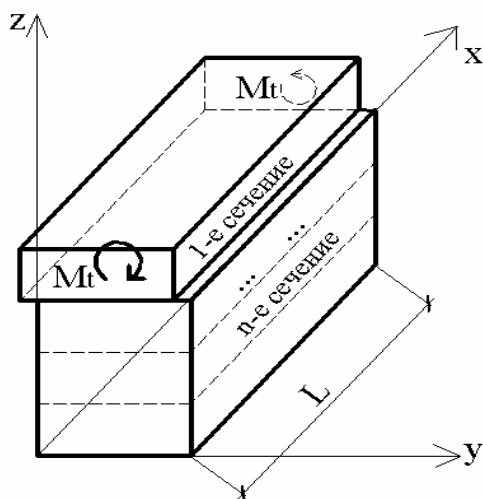


Рис. 3. Схема членения блока на отдельные полосы (стержни)

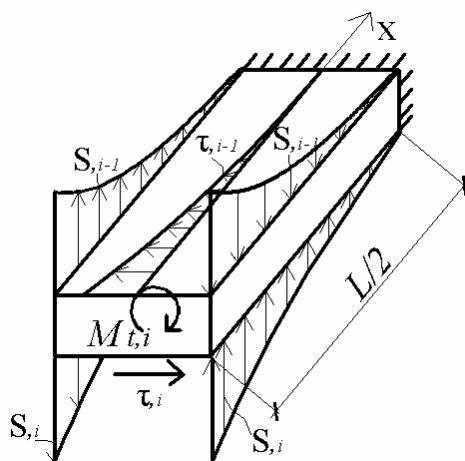


Рис. 4. Схема внутренних усилий, приложенных к i -му отсеченному стержню

Неизвестные $S_i(x)$ и $\tau_i(x)$ определим из условия совместности деформаций в i -ом сечении (по аналогии с [1]). Типовые строки системы уравнений для определения неизвестных усилий будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned}
 & -M_{t,i} \cdot \frac{r_i}{GJ_i} + T_{i-1} \cdot \frac{r_i^2}{GJ_i} + T_i \cdot \frac{r_i^2}{GJ_i} - QS_{i-1} \cdot \frac{b \cdot r_i}{GJ_i} + QS_i \cdot \frac{b \cdot r_i}{GJ_i} + T_i'' \cdot \frac{r_i^2}{G \cdot b} = \\
 & = M_{t,i+1} \cdot \frac{r_{i+1}}{GJ_{i+1}} - T_i \cdot \frac{r_{i+1}^2}{GJ_{i+1}} - T_{i+1} \cdot \frac{r_{i+1}^2}{GJ_{i+1}} + QS_i \cdot \frac{b \cdot r_{i+1}}{GJ_{i+1}} - QS_{i+1} \cdot \frac{b \cdot r_{i+1}}{GJ_{i+1}} - T_i'' \cdot \frac{r_{i+1}^2}{G \cdot b}; \\
 & M_{t,i} \cdot \frac{C}{GJ_i} - T_{i-1} \cdot \frac{r_i \cdot C}{GJ_i} - T_i \cdot \frac{r_i \cdot C}{GJ_i} + QS_{i-1} \cdot \frac{b \cdot C}{GJ_i} - QS_i \cdot \frac{b \cdot C}{GJ_i} - QS_i'' \cdot \frac{r_i}{EF} = \\
 & M_{t,i+1} \cdot \frac{C}{GJ_{i+1}} - T_i \cdot \frac{r_{i+1} \cdot C}{GJ_{i+1}} - T_{i+1} \cdot \frac{r_{i+1} \cdot C}{GJ_{i+1}} + QS_i \cdot \frac{b \cdot C}{GJ_{i+1}} - QS_{i+1} \cdot \frac{b \cdot C}{GJ_{i+1}} + QS_i'' \cdot \frac{r_{i+1}}{EF};
 \end{aligned} \right\} (1)$$

Система (1) записывается для каждого k -го шва (продольного сечения). Следовательно, количество уравнений будет равно $2n$, где n – число сечений (рис. 3).

В выражении (1) обозначено:

$T_i = T_i(x)$ – суммарные касательные усилия, связанные с погонными касательными усилиями $\tau_i(x)$ дифференциальным соотношением:

$$T_i'(x) = \tau_i(x); \quad (2)$$

$QS_i = QS_i(x)$ – суммарные вертикальные усилия, связанные с погонными усилиями $S_i(x)$ дифференциальным соотношением:

$$QS_i'(x) = S_i(x); \quad (3)$$

r_i – половина толщины i -того стержня;

b – ширина сечения стержня (см. рис. 2);

$C = b/2$ – радиус поворота стержня (половина ширины сечения);

GJ_i – крутильная жесткость i -того стержня;

EF – жесткость условных стерженьков единичной ширины, имитирующих сжатие (растяжение) волокон стержней в вертикальном направлении [1].

Систему уравнений (1) удобно решать с помощью разложения неизвестных в ряды Фурье по косинусам:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x); \\ QS &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{\pi \cdot n}{l}$.

Для решения системы уравнений внешние крутящие моменты M_i также раскладываются в ряды по косинусам:

$$M_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{i,n} \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x), \quad (5)$$

где $M_{i,n}$ – коэффициент Фурье разложения внешнего момента в ряд Фурье, который при любом виде функции изменения внешнего момента по длине стержня определяется достаточно просто по [3].

После дифференцирования, разложения всех неизвестных и грузовых членов в ряды и сокращения на $\text{Cos}(\alpha x)$ вместо дифференциальных уравнений получим систему линейных алгебраических уравнений, которая в случае одинакового сечения всех стержней (когда стержень разбит на отдельные полосы равной толщины) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned}
& T_{i-1} \cdot \frac{r_2}{GJ} + T_i \left(\frac{2r^2}{GJ} + \frac{2\alpha^2 r}{G \cdot b} \right) + T_{i+1} \frac{r^2}{GJ} + QS_{i-1} \left(-\frac{b \cdot r}{GJ} \right) + 0 + QS_{i+1} \frac{b \cdot r}{GJ} = \\
& = \frac{r}{GJ} (M_{t,i} + M_{t,i+1}); \\
& T_{i-1} \left(-\frac{r \cdot \tilde{N}}{GJ} \right) + 0 + T_{i+1} \frac{r \cdot C}{GJ} + QS_{i-1} \frac{b \cdot C}{GJ} + QS \left(-\frac{2bC}{GJ} - \frac{2\alpha^2 r}{EF} \right) + QS_{i+1} \frac{b \cdot C}{GJ} = \\
& = \frac{C}{GJ} (M_{t,i+1} - M_{t,i});
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $r_{i+1} = r_i = r$; $GJ_i = GJ_{i+1} = GJ$.

В выражении (6) через T_i и QS_i обозначены неизвестные коэффициенты Фурье разложения в ряды по косинусам (4), а через $M_{t,i}$ – коэффициенты Фурье разложения внешних крутящих моментов M_t в ряды (5).

Система уравнений (6) решается m раз, где m – верхний предел суммирования рядов (4) и (5). Как правило 7-9 нечетных членов ряда вполне достаточно для получения приемлемой точности расчетов.

После определения усилий $T_i(x)$ и $QS_i(x)$ каждый стержень рассматривается как нагруженный внешним моментом $M_{t,i}(x)$ и определенными из решения системы уравнений усилиями $T_{i-1}(x)$, $T_i(x)$; $QS_{i-1}(x)$, $QS_i(x)$ (рис. 4).

Зная усилия $T_i(x)$ и $QS_i(x)$, легко определить перемещения верхней части блока относительно нижней его части (рис. 1), после чего определяется неизвестная поперечная (нагельная) сила Q в арматуре элемента из условия равенства горизонтальных перемещений точек C и C^1 (рис. 5) в месте мысленного разреза арматуры подобно [1 и 2]:

$$Q = \frac{a_{Mt}^{ver} - a_{Mt}^{nig}}{2 \cdot a_{ob,ed} + 2 \cdot a_{sh,ed} + a_{Q,ed}^{ver} - a_{Q,ed}^{nig}}, \quad (7)$$

где обозначено:

$a_{ob,ed}$; $a_{sh,ed}$ – перемещения от обмятия бетона и сдвига арматуры от действия единичной силы $\bar{Q}=1$, определяемые как перемещения стержня, опирающегося на сплошное упругое основание [2];

a_{Mt}^{ver} – перемещение точки C от кручения верхней части, т.е. сжатой зоны (рис. 5) внешним моментом M_t с учетом внутренних сил $QS_i(x)$ и $T_i(x)$;

$a_{Q,ed}^{ver}$ – перемещение точки C от кручения верхней части (рис. 5) крутящим моментом, создаваемым единичной силой в арматуре $\bar{Q}=1$;

a_{Mt}^{nig} – перемещение точки C^1 , т.е. нижней части на рис. 5, от действия внутренних сил $QS_i(x)$ и $T_i(x)$, возникающих в результате кручения внешним моментом M_t ;

$a_{Q,ed}^{nig}$ – перемещение точки C^1 , т.е. нижней части на рис. 3, от действия внутренних сил $QS_i(x)$ и $T_i(x)$, возникающих от кручения единичной силой $\bar{Q}=1$.

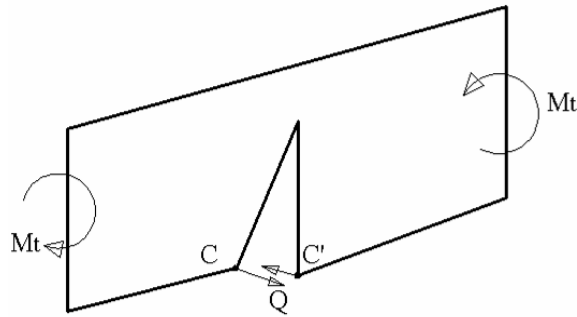


Рис. 5. Схема взаимного поворота двух блоков, отделенных трещиной

Составляющие перемещений, входящие в выражение (7), определяются аналогично [1,2], но с изменениями, связанными с определением внутренних усилий, сделанными в настоящей статье.

После вычисления неизвестной величины Q можно определить реальное перемещение в трещине a_{tot} .

Для определения крутильной жесткости элемента с нормальной трещиной следует определить угол поворота условно сплошного (без трещин) элемента:

$$\varphi_{ekv} = \frac{a_{tot}}{h/2}. \quad (8)$$

Отношение угла поворота сплошного элемента без трещин к эквивалентному, определяемому по (8), дает отношение жесткости сплошного элемента к жесткости элемента с нормальной трещиной.

Использование многослойной схемы (рис. 3) выгодно отличается от двухслойной схемы [1], т.к. точность определения усилий растет, подобно тому как в МКЭ при уменьшении размера КЭ увеличивается точность результата. Так, для балки сечением $b \times h = 10 \times 20$ см, с длиной блока между трещинами $L = 20$ см и высотой сжатой зоны 4 см максимальное значение усилий $S(x)$ в торце элемента (в сечении с трещиной) для многослойной схемы (при количестве слоев, равном пяти) составляют 36,8 Н/см, а для двухслойной схемы – 28,3 Н/см. Разница, как видим, достаточно ощутимая. Толщины слоев (условно – размеры конечных элементов), необходимые для получения приемлемой точности, можно определить путем пробных расчетов.

Выводы и перспективы исследований. Разработана методика определения внутренних усилий в стержневом элементе, к части поперечного сечения которого приложен крутящий момент. Вычисление этих усилий позволяет определить перемещения в сечении с нормальной трещиной при действии крутящего момента. Это, в свою очередь, позволяет определить крутильную жесткость железобетонного элемента с нормальными трещинами.

Перспективой является разработка методики определения жесткостных характеристик железобетонных элементов произвольного сечения с нормальными трещинами.

Кроме того, следует разработать программу на ЭВМ для автоматизированного расчета перемещений (и жесткостных параметров) элементов с нормальными трещинами с целью ее использования в качестве подпрограммы при расчете мостовых сооружений, перекрытий и других ребристых систем с учетом пространственной работы.

Литература

1. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами // Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7. Том 1. – Київ: ДерждорНДІ, 2007. – С. 3-8.
2. Азизов Т.Н. Просторова робота залізобетонних перекриттів. Теорія та методи розрахунку: Автореф. дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Полтавський національний технічний університет. – Полтава, 2006. – 35 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправл. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. Горнов В.Н. Исследование прочности и жесткости промышленных конструкций жилых домов. – М.: Госстройиздат, 1954. – 240 с.
5. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
6. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.