

ВПЛИВ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ Й РЕЖИМУ ЗАВАНТАЖУВАННЯ НА ОКРЕСЛЕННЯ ТА ФОРМАЛІЗОВАНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДІАГРАМИ ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОНУ

Крусь Ю.О.

Крусь О.Ю.

Національний університет водного господарства
та природокористування

Як відомо [1,2,3], бетон являє собою твердий матеріал, що складається з хаотично розташованих зернин дрібного й крупного заповнювачів та цементного каменя, що їх зв'язує. Цементний камінь, у свою чергу, вміщає пружний кристалічний зросток, в'язку масу-гель та велику кількість різних за розмірами пор і капілярів, в яких утримується вода у вигляді пари й рідкому стані. Таке сполучення структурних складових, які до того ж перебувають у різних агрегатних станах, зумовлює надзвичайну неоднорідність бетону та наділяє його яскраво вираженими нелінійними властивостями. Це відображається, зокрема, на отриманих у результаті випробувань еталонних бетонних зразків одноразовим статичним завантаженням центральним стиском до руйнування діаграмах залежності між напруженнями σ_b і відносними деформаціями ε_b , яка набуває криволінійного окреслення (рис. 1).

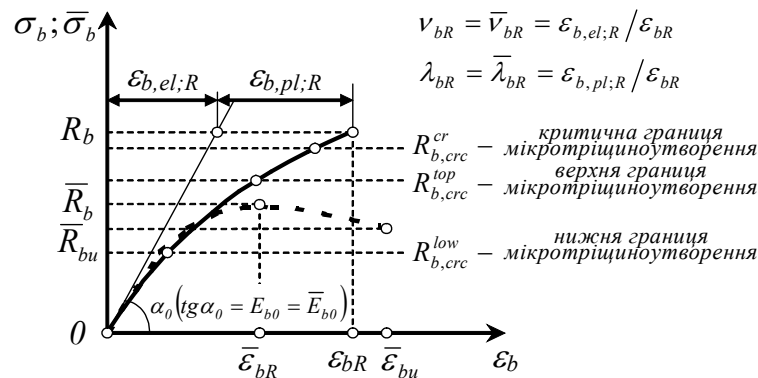


Рисунок 1 – Діаграми деформування бетону при одноразовому статичному завантаженні центральним стиском до руйнування та їхні основні параметри:

— — — — — “м’який” режим завантаження;
 - - - - - “жорсткий” режим завантаження

Форма діаграми $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ залежить від багатьох факторів: виду й класу бетону, його складу, співвідношення властивостей складових компонентів, ступеня зчеплення між цементно-піщаним розчином і крупним заповнювачем, їхніми деформативними характеристиками, способу обробки (природне тверднення, теплова обробка тощо), швидкості, режиму та характеру навантаження, жорсткості окремих елементів випробувальних установок і т. д.¹ Так, наприклад, із збільшенням класу бетону нелінійні деформації бетону знижуються, унаслідок чого зменшується кривизна діаграми $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ і для бетону високих класів вона наближається до прямої лінії [4, 5, 6, 7, 8, 33]. Те ж саме спостерігають і зі збільшенням швидкості завантаження [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 33].

Зупинимось на чиннику, що найбільшою мірою визначає окреслення кривої $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ – режимі завантажування. Так, при дослідженні у звичайних гідравлічних пресах із постійною швидкістю приросту напружень $V_\sigma = d\sigma/dt = const$ (при так званому “м’якому” режимі завантажування) руйнування зразків відбувається після досягнення відносними деформаціями у бетони граничного значення ε_{bR} (так званої “граничної стисливості”), яке відповідає максимальному напруженню R_b (так званим “тимчасовому опору осьовому стисканню” або “призмівій міцності”), а крива $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ складається лише з висхідної вітки (див. діаграму у вигляді суцільної лінії на рис. 1). Якщо ж випробування проводити в нестандартних установках, коли задається рівномірне збільшення змушених деформацій, тобто коли $V_\varepsilon = d\varepsilon/dt = const$ (при так званому “жорсткому” режимі завантажування), то після досягнення максимального напруження \bar{R}_b , якому відповідає відносна деформація $\bar{\varepsilon}_{bR}$, на діаграмі $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ ¹ спостерігається низхідна вітка, і подальше зростання деформацій до свого граничного значення $\bar{\varepsilon}_{bu}$, яке може значно перевищувати деформацію $\bar{\varepsilon}_{bR}$, супроводжується падінням спричинених зовнішніми навантаженнями напружень до величини \bar{R}_{bu} (див. діаграму, позначену пунктирною лінією на рис. 1). Наголосимо, що випробування у “жорсткому” режимі вимагає спеціального лабораторного устаткування, а кривизна діаграм, їхні параметричні точки і, відповідно, основні механічні характеристики одного й того ж самого бетону, отримані при різних режимах, але за однаковий проміжок часу, очевидно, не співпадають. Зокрема, на характерні для руйнування у “жорсткому” режимі менші значення σ_b і більші ε_b звертають увагу В.М. Бондаренко [14], А.А. Гвоздев [15], Н.П. Красинський [16], Д.Р. Маїлян [17], Г.В. Мурашкін [18], В.Г. Назаренко [19], С.І. Роговий [33], М.М. Холмянський [20] і багато інших дослідників.

Аби мінімізувати вплив зазначених вище факторів на міцнісні й деформативні характеристики бетону, а до того ж, певною мірою, гарантувати отримання результатів, які б можна було зіставити між собою, систематизувати й узагальнити, чинні в Україні (а також інших країнах колишнього СРСР) нормативні документи [21,22] передбачають випробування одноразовим статичним завантажуванням до руйнування еталонних бетонних зразків призматичної форми при співвідношенні висоти призми до її ширини ≥ 4 із постійною швидкістю збільшення напружень $0,6 \pm 0,2$ МПа/с – при осьовому стисканні та $0,05 \pm 0,02$ МПа/с – при осьовому розтяганні, тобто у “м’якому” режимі завантажування. Згідно зі стандартами термін випробування складає близько 1,5 год.

Відзначимо, що діаграми $\sigma_b \sim \varepsilon_b$, одержані у такий спосіб, а саме – за однорідного напружено-деформованого стану, якому властивий рівномірний розподіл деформацій і напружень у перпендикулярних до напрямку дії навантаження перерізах центрально стиснутих (або розтягнутих) елементів, є умовними. Як відомо з теорії пружності й пластичності [23, 24], в реальних конструкціях, що зазнають згинання, позацентрових стискання й розтягання та ін. напруження й деформації у перпендикулярних до поздовжньої осі перерізах зігнутих елементів у геометричному відношенні і в часі розподіляються нерівномірно, тобто має місце неоднорідний напружено-деформований стан. Саме з цієї причини багато які експериментатори, щоб наблизити умови деформування бетону при контрольних випробуваннях до умов його роботи в конструкції, вдаються до випробувань еталонних бетонних зразків у “жорсткому” режимі завантажування. Приймаючи для зігнутих елементів,

¹ Тут свідомо деформації позначаємо без верхньої риски, маючи на увазі, що одним і тим же самим деформаціям ε_b при різних режимах завантажування відповідають відмінні значення напружень σ_b і $\bar{\sigma}_b$.

довжина яких у багато разів перевищує розміри поперечного перерізу, дотичні напруження в перерізі суттєво менші за згинні нормальні напруження, а тиск між суміжними волокнами дуже малий, справедливими гіпотези плоских перерізів та суміщення нульових напружень і нульових деформацій на єдиній нейтральній осі (так звані “гіпотези Бернуллі” [7, 23, 24]), ці дослідники вважають припустимим без будь-яких подальших корегувань застосування діаграм деформування, отриманих в умовах однорідного напружено-деформованого стану при “жорсткому” режимі завантажування для оцінювання неоднорідного напружено-деформованого стану перерізів елементів за будь-яких силових впливів. Щоправда, такому прямому експериментальному шляху отримання діаграм механічного стану матеріалів, у більшості випадків, передує створення відмінного від стандартного, специфічного й досить складного випробувального устаткування [3, 16, 25, 26, 27, 28, 29], на що почасти уходять роки й десятиріччя².

На підставі багаторічного й фундаментального вивчення явищ, що відбуваються в бетоні, і характеру його деформування сформоване сучасне уявлення про цей багатоконпонентний будівельний матеріал. Вважається, що у загальному випадку за будь-якого навантаження (одноразового, тривалого, багаторазово повторювального та ін.) повна силова деформація бетону ε_b (див. діаграму, позначену суцільною лінією на рис. 1) складається із пружних деформацій, деформацій повзучості і псевдопластичних деформацій [2, 4, 8, 37, 38, 141]. У свою чергу, повзучість поділяють на лінійну й нелінійну. Дослідженнями, виконаними під керівництвом О.Я. Берга [2, 4], виявлено, що лінійна повзучість спричинена деформаціями цементного гелю і не супроводжується порушенням суцільності структури бетону. Вона має місце при низьких напруженнях, які не перевищують нижньої границі мікротріщиноутворення $R_{b,crc}^{low}$ (за деякими даними $R_{b,crc}^{low} \approx (0,3...0,5)R_b$). Нелінійна ж повзучість проявляється при більш високих напруженнях, що коливаються в межах $R_{b,crc}^{low} \dots R_{b,crc}^{top}$ (тут $R_{b,crc}^{top}$ – верхня границя мікротріщиноутворення; вважають, що $R_{b,crc}^{top} \approx (0,7...0,9)R_b$, причому для бетонів низької й середньої міцності $R_{b,crc}^{top} \approx (0,7...0,75)R_b$, а для надміцних – може сягати $(0,85...0,9)R_b$), і є наслідком не лише в'язкої текучості гелю, але й порушень у кристалічних зростках отвердівшого в'язучого, а саме – виникнення мікротріщин відриву та їхнього розвитку. Нарешті, псевдопластичні деформації розвиваються при напруженнях, більших за $R_{b,crc}^{top}$, і пов'язані з порушенням суцільності структури бетону за рахунок макроскопічних руйнувань, тобто формування з мікротріщин магістральних макротріщин відриву по значному об'єму бетону, що незворотно призводить до руйнування.

Разом із тим, багато хто з дослідників [38, 39, 40, 41, 42] вважають поділення повзучості на лінійну та нелінійну дуже умовним, оскільки у дослідях нелінійний характер залежності $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ спостерігається навіть при дуже низьких напруженнях.

При одноразовому статичному завантажуванні представлену класифікацію деформацій дещо спрощують, не порушуючи при цьому її змісту. Так, повні силові деформації бетону ε_b (див. діаграму у вигляді суцільної лінії на рис. 1) умовно розглядають [3, 6, 39, 40, 41, 42, 43] як суму

² Існують і інші – посередні – методи одержання діаграм деформування, зокрема, при випробуванні в “м'якому” режимі позacentровим стисканням еталонних бетонних призм [20, 30, 31, 32] або центральним стисканням армованих призмових зразків [15, 33, 34], дослідженні зразків-циліндрів із бетону у спеціальній тензометричній трубці [18], по результатах випробувань залізобетонних балок на “чисте” згинання [35, 36].

пружних (миттєво пружних) деформацій $\varepsilon_{b,el}$, які виникають миттєво після прикладання навантаження і так само миттєво повністю відновлюються після його усунення, і пластичних $\varepsilon_{b,pl}$, що залишаються після усунення навантаження (отже, є незворотними) та зумовлені так званою швидкоплинною повзучістю [8, 29, 42, 44], яка, зокрема, при ступінчастому завантажуванні має місце в початковий проміжок часу після прикладання навантаження і триває протягом декількох хвилин. Пластичні деформації залежать від інтенсивності навантаження та тривалості його дії, тобто є змінними в часі.

У теорії залізобетону однією з ключових проблем, являючи собою багатоплановий науковий і практичний інтерес, є побудова та формалізоване представлення діаграми механічного стану бетону, яка визначала б характер його роботи на всьому діапазоні деформування.

На сьогоднішній день існує багато пропозицій з математичного апроксимування зв'язку між напруженнями й деформаціями бетону, яке враховує не лише основні властивості матеріалу, але й швидкість прикладання навантаження, послідовність впливів, стан навколишнього середовища тощо. Розглянемо деякі функції, якими описують процес деформування бетону при його одноразовому статичному завантажуванні центральним стиском, не враховуючи чинника часу.

Відразу ж зазначимо, що розглядувані нижче аналітичні залежності отримані і для “м'якого”, і для “жорсткого” режимів завантажування. Фізичний зміст застосованих різними авторами пружно-пластичних характеристик бетону, а також відповідні позначення наведені, у тому числі, на рис. 1.

Степеневі одночлени та поліноміальні функції. Проф. Бах на підставі власних дослідів, проведених у 1895-1897 рр. у Штутгартській лабораторії, для всіх матеріалів, зокрема – бетону, деформування яких не підпорядковується закону Гука, вивів залежність у вигляді [2,7]

$$\sigma_b = A\varepsilon_b^{1/m}, \quad (1)$$

де A і m (для бетону $m > 1$) – дослідні коефіцієнти, які визначають властивості матеріалу.

Проф. Я.В. Столяров, аналізуючи в роботі [7] таку форму запису закону деформування, ставить під сумнів її придатність із наступних причин: по-перше, за своєю структурою співвідношення (1) передбачає нескінченно велике значення модуля пружності бетону E_{b0} (при $\sigma_b=0$), що цілком не відповідає результатам дослідів; по-друге, і це більш важливе, добре окреслюючи деформації при малих і середніх напруженнях, залежність (1) дає значні відхилення з дослідними даними при наближенні до руйнування (коли $\sigma_b \rightarrow R_b$).

Не зважаючи на зазначені недоліки, закон деформування у вигляді (1), за свідченнями Я.В.Столярова, тривалий час мав неабияке розповсюдження серед німецьких науковців.

Власне Я.В.Столяров, аби уникнути вад попередньої формули (1), запропонував більш складне співвідношення між напруженнями й деформаціями у вигляді квадратної параболи [7]

$$\sigma_b = \alpha\varepsilon_b - \beta\varepsilon_b^2, \quad (2)$$

де $\alpha = E_{b0}$;

$$\beta = \frac{E_{b0} - E_{bR}}{2\varepsilon_{bR}} = \left(1 - \frac{E_{bR}}{E_{b0}}\right) \frac{E_{b0}}{2\varepsilon_{bR}};$$

ε_{bR} – граничне значення повної відносної деформації бетону в момент його руйнування (у графічному тлумаченні момент руйнування відповідає вершині параболи); E_{b0} і E_{bR} – відповідно початкове (коли $\varepsilon_b=0$) і граничне (коли $\varepsilon_b=\varepsilon_{bR}$) значення модуля пружності бетону.

У розвиток співвідношення (2), що характеризує роботу бетону лише на висхідній ділянці завантажування, В.С.Дорофеев і В.Ю.Барданов пропонують закон деформування бетону для всього діапазону завантажування, включаючи й низхідну вітку, у вигляді такої аналітичної залежності [45]:

$$\bar{\sigma}_b = E_{b0}\varepsilon_b - \bar{E}_1\varepsilon_b^2 + \|_{\varepsilon_{bR}} \bar{E}_2(\varepsilon_b - \bar{\varepsilon}_{bR})^2, \quad (3)$$

де $\|_{\bar{\varepsilon}_{bR}} = H(\varepsilon_b - \bar{\varepsilon}_{bR}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_b \leq \bar{\varepsilon}_{bR} \\ 1 & \text{при } \varepsilon_b > \bar{\varepsilon}_{bR} \end{cases}$ – функціональний перервник (функція Хевісайда);

E_{b0} – початковий модуль пружності бетону; \bar{E}_1 і \bar{E}_2 – модулі, які враховують нелінійність деформування бетону відповідно на висхідній і низхідній ділянках та визначаються за формулами

$$\bar{E}_1 = \frac{E_{b0}^2}{4\bar{R}_b}; \quad \bar{E}_2 = \frac{0,85\bar{R}_b - (E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{E}_1\bar{\varepsilon}_{bR}^2)}{(\varepsilon_b - \bar{\varepsilon}_{bR})^2},$$

тут \bar{R}_b – максимальне напруження, якому відповідає відносна деформація $\bar{\varepsilon}_{bR}$; $0,85\bar{R}_b = \bar{R}_{bu}$ – напруження, при якому повні відносні деформації бетону досягають граничного значення $\bar{\varepsilon}_{bu}$, яке визначають із виразу

$$\bar{\varepsilon}_{bu} = (4,03 - 0,02\bar{R}_b) \times 10^{-3}.$$

Для відбиття зв'язку між напруженнями й деформаціями за пропозицією Г.Г. Соломенцева [46] може бути застосоване рівняння вигляду

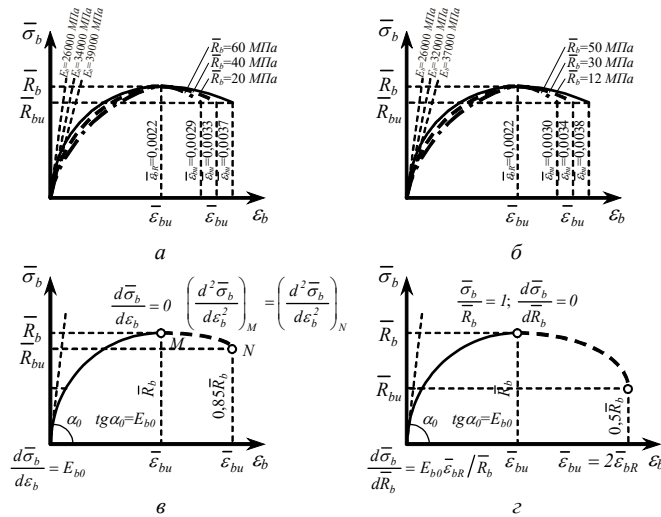
$$\sigma_b = R_b \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} \right)^\alpha \right], \quad (4)$$

де $\alpha = \sqrt{R_b/135}$; 135 [МПа] – найбільше теоретичне напруження, за якого досягається рівномірність цементного каменя і крупного заповнювача із середньозернистого граніту.

Р.О.Красновський, І.С.Кроль і С.А.Тихомиров [47], а пізніше В.Є.Ящук [48,49], базуючись на сучасних уявленнях про природу деформування неоднорідних тіл, надають степеневому параметру α у формулі (4) більш точного фізичного змісту і пропонують визначати його за виразом $\alpha = E_{b0}\varepsilon_{bR}/R_b = 1/\nu_{bR}$, де ν_{bR} – граничне значення коефіцієнта пружності бетону.

Узагальнення великого об'єму накопиченого дослідниками експериментального матеріалу дає можливість у міжнародних рекомендаціях ЄКБ-ФІП [50] прийняти залежність $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ у графічній формі, занормувавши параметри нелінійного деформування бетону залежно від \bar{R}_b у характерних точках апроксимативної кривої: на початку завантажування, при максимальному напруженні \bar{R}_b і максимальних деформаціях $\bar{\varepsilon}_{bu}$ (рис. 2,а). Так, максимальні деформації $\bar{\varepsilon}_{bu}$, що відповідають напруженню $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_{bu}$, і модуль пружності E_{b0} (при $\bar{\sigma}_b=0$) набувають значень

відповідно $\bar{\varepsilon}_{bu} = (290...370) \times 10^{-5}$ і $E_{b0} = (26...39) \times 10^3$ МПа, будучи залежними від \bar{R}_b , яке коливається в межах $\bar{R}_b = 20...60$ МПа. Як бачимо, зі збільшенням класу бетону його модуль пружності E_{b0} зростає, а гранична стисливість $\bar{\varepsilon}_{bu}$ зменшується. При цьому максимальне напруження \bar{R}_b досягається при одному й тому ж самому значенні відносної деформації стискування бетону $\bar{\varepsilon}_{bR} = 220 \times 10^{-5}$.



а – за міжнародними рекомендаціями ЄКБ-ФІП; б – за Кодексом - зразком ЄКБ-ФІП; в – за пропозицією В.М. Байкова, С.В. Горбатова та З.А.Димитрова; г – за пропозицією Ю.П. Гуці та Л.Л. Лемиша.

Рисунок 2 – Діаграма деформування бетону при одноразовому статичному завантажуванні центральним стиском

У більш пізній редакції міжнародних норм – Кодексі-зразку ЄКБ-ФІП [51] – для бетону крім графічного представлення залежності $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ (рис. 2,б) пропонується фізичне рівняння, яке являє собою дробово-раціональну функцію і має вигляд

$$\bar{\sigma}_b = \bar{R}_b \frac{k\bar{\eta} - \bar{\eta}^2}{1 + (k-2)\bar{\eta}}, \quad (5)$$

де $\bar{\eta} = \varepsilon_b / \bar{\varepsilon}_{bR}$ – рівень деформацій; $\bar{\varepsilon}_{bR} = 220 \times 10^{-5}$ – гранична стисливість бетону, що відповідає максимальному напруженню $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_b$; $k = E_{b0} \bar{\varepsilon}_{bR} / \bar{R}_b = 1 / \nu_{bR}$; ν_{bR} і E_{b0} – відповідно граничне значення коефіцієнта пружності та початкове значення модуля пружності бетону.

Ця ж сама форма запису (5) математичної моделі діаграми деформування бетону при центральному стиску, яку супроводжує табульоване представлення основних пружно-пластичних параметрів бетону (E_{b0} ; $\bar{\varepsilon}_{bR}$; $\bar{\varepsilon}_{bu}$) у широкому діапазоні міцностей $\bar{R}_b = 20...98$ МПа, збірається й у чинних європейських нормах Eurocode 2 [52].

Щойно після виходу у світ рекомендацій ЄКБ-ФІП [50] зусилля вчених спрямовуються на отримання залежності $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$, яка б, подібно до концепції зазначеного документа, відповідала умовам, що нормуються певними показниками (так званими “нормованими показниками”),

і мала б зручну в користуванні аналітичну форму запису. Зокрема, В.М. Байков, С.В. Горбатов і З.А. Димитров отримали таку залежність у вигляді полінома п'ятого степеня [53]

$$\bar{\sigma}_b = A \left(\frac{\varepsilon_b}{\bar{\varepsilon}_{bR}} \right) + B \left(\frac{\varepsilon_b}{\bar{\varepsilon}_{bR}} \right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon_b}{\bar{\varepsilon}_{bR}} \right)^3 + D \left(\frac{\varepsilon_b}{\bar{\varepsilon}_{bR}} \right)^4 + F \left(\frac{\varepsilon_b}{\bar{\varepsilon}_{bR}} \right)^5, \quad (6)$$

де A, B, C, D і F – постійні параметри, які характеризують матеріал і визначаються розв'язанням системи рівнянь, кожне з яких фіксує певну граничну умову (на рис. 2,в показано п'ять таких умов, що відповідає кількості нормованих показників: E_{b0} ; $\bar{\varepsilon}_{bR}$; $\bar{\varepsilon}_{bu}$; \bar{R}_b і \bar{R}_{bu}).

У подібному вигляді функціональний зв'язок між напруженнями й деформаціями одержали й інші автори, у тому числі В.І. Бабич і Д.В. Кочарьов [54], А.М. Бамбура, В.Я. Бачинський і О.Б. Голишев [26, 55, 56, 57, 58], П.Ф. Вахненко і В.М. Кондель [59,60], Ю.П. Гуца і Л.Л. Леміш [61, 62, 63], М.І. Карпенко і Т.А. Мухамедієв [64, 65], В.М. Кожевников [66], О.Б. Пірадов [67], С.І. Роговий [33] та ін. Відмінності, що мають місце, спричинені неоднаковими умовами проведення експериментальних досліджень і полягають у різній кількості прийнятих нормованих показників (а, отже, і степеня полінома) і, відповідно, умов, яким зазначений зв'язок із застосуванням цих показників відповідає. Для прикладу на рис. 2,г представлена діаграма отриманої авторами [61,62,63] залежності $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ у вигляді полінома четвертого степеня та записані умови, що містять нормовані параметри, для її (діаграми) вузлових точок.

Показникові функції. Однією з перших пропозицій, зроблену ще в далекому 1899 р., стосовно апроксимації діаграми стиску бетону показниковою функцією слід вважати формулу Ріттера, що має вигляд [2, 7, 8]

$$\sigma_b = R(1 - e^{-m\varepsilon_b}), \quad (7)$$

де R – кубикова міцність бетону; e – основа натурального логарифма; m – сталий параметр нелінійності деформування бетону (у дослідях Ріттера $m=1000$).

Проф. Без, не змінюючи математичного характеру формули (7), надає їй дещо іншого вигляду [2, 8]

$$\sigma_b = \eta R_b(1 - e^{-m\varepsilon_b}), \quad (8)$$

увівши параметр призмової міцності R_b замість кубикової міцності R і коефіцієнт η , що робить зазначену залежність (8) більш гнучкою і пристосованішою до різних бетонів.

Багато які дослідники [2,7,8,68,69] вважають припустимим застосування для бетону ще однієї формули, яка характеризує зв'язок між напруженнями й деформаціями та впливає з одержаного проф. Л.І.Оніщиком для цегляного мурування співвідношення між січним модулем пружно-пластичних деформацій E' і відповідними стискаючими напруженнями σ у вигляді [70]

$$E' = E_0 \left[1 - \left(\frac{\sigma}{l,IR} \right)^k \right]. \quad (9)$$

В адаптованому для бетону варіанті вона може бути представлена таким виразом [8,68]:

$$\sigma_b = l,IR \left(1 - e^{-\frac{E_{b0}}{l,IR} \varepsilon_b} \right) \quad (10)$$

(позначення ті ж самі, що у формулі (7)).

Маючи досить високі апроксимативні властивості [7, 68], у залежності (10) присутній один очевидний недолік: при $\sigma_b=1,1R$ граничні відносні деформації дорівнюють ∞ , що суперечить дослідям. Це, власне, відноситься і до двох попередніх показникових функцій – (7) і (8).

Проф. В.М.Бондаренко нелінійний зв'язок між напруженнями й деформаціями в бетоні залежно від режиму його завантажування пропонує враховувати такими співвідношеннями [14,43]:

- для “м'якого” режиму

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_{b0}} \left[1 + k \left(\frac{\sigma_b}{R_b} \right)^q \right], \quad (11)$$

- для “жорсткого” режиму

$$\bar{\sigma}_b = E_{b0} \varepsilon_b e^{-(\varepsilon_b/\bar{\varepsilon}_{bR})}, \quad (12)$$

де k і q – сталі параметри нелінійності деформування бетону, які визначають дослідним шляхом; e – основа логарифма натурального.

Наведемо ще один запис діаграми $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ у вигляді показникової функції, що належить проф. Р.Л. Маїлян у має вигляд [71,72]

$$\bar{\sigma}_b = E_{b0} \varepsilon_b e^{-\frac{1}{m} \left(\frac{\varepsilon_b}{\bar{\varepsilon}_{bR}} \right)^m}, \quad (13)$$

де m – коефіцієнт, який визначають із дослідів.

Звернімо увагу, що вирази (12) і (13) набувають абсолютно однакового вигляду при $m = 1$.

Дробово-лінійні функції. Вважають [7,8], що вперше закон деформацій, описаний такого типу функцією, застосував у 1903 р. Франке. Запропонована залежність має вигляд

$$\sigma_b = \frac{\alpha \varepsilon_b}{1 + \beta \varepsilon_b}, \quad (14)$$

(тут α і β – дослідні коефіцієнти, які характеризують нелінійні властивості бетону) і, на відміну від формули Баха (1), забезпечує задовільне узгодження з дослідними даними не лише у межах малих і середніх напружень, але й на всьому діапазоні деформування аж до руйнування.

Таку саму форму запису закону деформування багато років потому частково використав проф. Б.С. Расторгуєв [73]. У розробленій ним методиці залежність $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ для стиснутого бетону прийнята дробово-лінійною для висхідної вітки і лінійною – для низхідної (див. діаграму, позначену пунктирною лінією на рис. 1) та має загальний вигляд

$$\bar{\sigma}_b = \bar{v}_b E_{b0} \varepsilon_b, \quad (15)$$

де $\bar{v}_b = \frac{1}{1 + \bar{\alpha}_b \varepsilon_b}$ при $0 < \varepsilon_b \leq \bar{\varepsilon}_{bR}$;

$\bar{v}_b = \frac{\bar{\gamma}_1}{\varepsilon_b} - \bar{\gamma}_2$ при $\bar{\varepsilon}_{bR} < \varepsilon_b \leq \bar{\varepsilon}_{bu}$;

$$\bar{\alpha}_b = \frac{1/v_{bR} - 1}{\bar{\varepsilon}_{bR}}; \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{\bar{\varepsilon}_{bu}(v_{bR} - \bar{v}_{bu})}{\bar{\eta}_d - 1}; \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{v_{bR} - \bar{v}_{bu} \bar{\eta}_d}{\bar{\eta}_d - 1};$$

$$v_{bR} = \frac{\bar{R}_b}{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR}}; \quad \bar{v}_{bu} = \frac{\bar{R}_{bu}}{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bu}}; \quad \bar{\eta}_d = \frac{\bar{\varepsilon}_{bu}}{\bar{\varepsilon}_{bR}}.$$

М.Ф. Давидов і О.М. Донченко [74], проаналізувавши власні досліди, а також результати багаточисельних експериментів інших авторів, дійшли висновку, що найкращої апроксимації дослідних даних для різних бетонів можна досягти при застосуванні такого співвідношення:

$$\sigma_b = \frac{\varepsilon_b E_{b0} R'}{R' + \varepsilon_b E_{b0}}, \quad (16)$$

де $R' = R(1,2 + 0,018R)$; R – кубикова міцність.

Ще одна залежність у формі дробово-лінійної функції для аналітичного описання діаграм стискання бетону, яка, за свідченнями її автора, достатньо точно може бути реалізована й для центрального розтягання, належить М.Л.Заку [75] та має вигляд

$$\sigma_b = R_b \frac{\gamma \eta}{1 + (\gamma - 1)A}, \quad (17)$$

тут $\eta = \varepsilon_b / \varepsilon_{bR}$; $\gamma = E_{b0} \varepsilon_{bR} / R_b$; $A = (0,75\eta + 0,25\eta^3)\gamma / [1,5(\gamma - 1)]$.

Крім представлених вище відомо багато й інших виразів для апроксимації кривої $\sigma_b \sim \varepsilon_b$. Так, наприклад, В.В. Михайлов [76,77] пропонує діаграму деформування описувати **сплайн-функцією**, прийнявши за вузли інтерполяції координати чотирьох характерних точок механічного стану бетону при стиску R_b ; $R_{b,crc}^0$; $R_{b,crc}^V$ і R_{bu} (див. рис. 1). У розвиток такого підходу, Б.Ф. Туркалов і Б. Таїнг вважають [78], що кількість опорних параметричних точок має бути збільшена до п'яти за рахунок введення до вже зазначених відповідального за критичну межу мікротріщиноутворення напруження $R_{b,crc}^{cr}$. Або ще таке методологічне впровадження: наслідуючи М. Еверарда [79], О.В. Яшина [80] і М.П. Красинського [47], які започаткували та ефективно застосовували в теорії бетону й залізобетону **тригонометричні функції**, та спираючись на потужний експериментальний матеріал, А.Ф. Остапенко доводить [81], що будь-яка з існуючих кривих діаграм деформування бетону та арматури при стисканні й розтяганні, а також криволінійні ділянки діаграм деформування залізобетонних елементів і конструкцій (зокрема, “моменту-кривизни” – у перерізі елемента, “зусилля-переміщення” – для колони, “зусилля-деформації” – для зв'язку колони з диском перекриття та ін.) з достатньо високою точністю можуть бути апроксимовані залежністю

$$\sigma = A \sin F\varepsilon + B \cos F\varepsilon + C\varepsilon + D, \quad (18)$$

де A , B , C , D і F – коефіцієнти, які встановлюються дослідом або відшукуються за наближенням в окремих характерних точках діаграми.

Застосування такої незвичної, здавалося б, тригонометричної функції (18) автор [81] пояснює тим, що, по-перше, вигляд зазначеної формули повністю співпадає з розв'язанням диференціального рівняння стиснуто-зігнутого пружного стержня як функції його прогину, а по-друге, функції синуса та косинуса при інтегруванні й диференціюванні переходять одна в іншу, не ускладнюючи розрахунків.

Висновки

Як бачимо, існує безліч пропозицій з математичного описання діаграм деформування бетону. Разом із тим, аналіз результатів численних експериментів [82,83,84] свідчить: у більшості випадків різні переконливо обгрунтовані з точки зору фізичних процесів, що відбуваються в матеріалі, способи апроксимації діаграм $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ при оцінці напружено-деформованого стану перерізів залізобетонних елементів призводять до результатів, які практично мало чим відрізняються. Отже при виборі базової функції слід виходити з вимог простоти аналітичного зв'язку, його переконливості у фізичному тлумаченні та наочності в графічній інтерпретації, можливості трансформування залежності з метою врахування різних факторів (швидкості, режиму й характеру навантаження тощо), менших витрат розрахункової праці при математичному опрацюванні (диференціюванні, інтегруванні та ін.), зручності у використанні при розв'язанні конкретних практичних завдань.

Література

1. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.
2. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. – М.: Госстройиздат, 1962. – 96 с.
3. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчёта и конструирования: Учеб. пособие для студентов строительных специальностей/Н.П.Блещик, Д.Д.Жуков, Д.Н.Лазовский и др.; Под ред. Т.М.Пецоляда и В.В.Тура. – Брест: БГТУ, 2003. – 380 с.
4. Берг О.Я., Щербаков Е.Н., Писанко Г.Н. Высокопрочный бетон. – М.: Стройиздат, 1971. – 208 с.
5. Гвоздев А.А. Структура бетона и некоторые особенности его механических свойств//Прочность, структурные изменения и деформации бетона: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР. – М.: Стройиздат, 1978. – С. 5-17.
6. Расчёт железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям / А.С.Залесов, Э.Н.Кодыш, Л.Л.Лемыш, И.К.Никитин. – М.: Стройиздат, 1988. – 320 с.
7. Столяров Я.В. Введение в теорию железобетона. – М.-Л.: Госстройиздат, 1941. – 447 с.
8. Фомица Л.Н., Сумбатов Р.А. Измерение напряжений в железобетонных конструкциях. – Киев: Будівельник, 1994. – 168 с.
9. Васильев П.И. Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учётом влияния времени//Изв. ВНИИГ. – Т. 45. – Л.: Госэнергоиздат, 1951. – С. 91-93.
10. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры//Напряжённо-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР/Под ред. С.М.Крылова и Т.А.Мухамедиева. – М.: НИИЖБ, 1986 – С. 7-25.
11. Квирикадзе О.П. О зависимости между деформациями и скоростью нагружения. – Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1962. – 125 с.

12. Кретов В.И. Влияние скорости нагружения на характер связи «напряжение-деформации» для бетонов средних и высоких марок//Вопросы надёжности железобетонных конструкций: Тез. докл. к обл. науч.-техн. сем-ру (октябрь, 1976 г.); Под общ. ред. А.С.Лычева. – Куйбышев, 1976. – С. 78-83.
13. Яшин А.В. Прочность и деформации бетона при различных скоростях загрузки//Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР/ Под ред. А.А.Гвоздева. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 23-39.
14. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982. – 287 с.
15. Гвоздев А.А., Шубик А.В., Матков Н.Г. О полной диаграмме сжатия бетона, армированного поперечными сетками//Бетон и железобетон. – 1988. – № 4. – С. 37-39.
16. Красинский Н.П. К определению полной диаграммы сжатия бетона//Совершенствование методов расчёта и исследование новых типов железобетонных конструкций. – Л., 1987. – С. 92-97.
17. Маилян Д.Р., Бойцов В.Н. К аналитическому описанию диаграмм сжатия и растяжения бетона//Новые исследования в области бетонных и железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. Ташкентского политехн. ин-та. – Ташкент, 1985. – С. 34-39.
18. Мурашкин Г.В., Бутенко С.А., Яворский И.Д. К определению диаграммы « σ - ε » бетона с ниспадающим участком//Железобетонные конструкции. Экспериментально-теоретические исследования. – Куйбышев, 1984. – С. 20-25.
19. Назаренко В.Г., Боровских А.В. Диаграмма деформирования бетонов с учётом ниспадающей ветви//Бетон и железобетон. – 1999. – № 2. – С. 18-22.
20. Холмянский М.М. К механизму деформирования и разрушения бетона при сжатии и растяжении//Бетон и железобетон. – 1989. – № 9. – С. 25-26.
21. ГОСТ 24452-80. Бетоны. Методы определения призмочной прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 55 с.
22. ГОСТ 8829-85. Конструкции и изделия бетонные и железобетонные сборные. Методы испытаний нагружением и оценка прочности, жёсткости и трещиностойкости. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 24 с.
23. Безухов Н.И. Теория упругости и пластичности. – М.: Госиздат техн.-теоретич. лит-ры, 1953. – 420 с.
24. Курс сопротивления материалов. Часть первая/М.М.Филоненко-Бородич, С.М.Изюмов, Б.А.Олисов и др.; Под ред. М.М.Филоненко-Бородича. – 3-е изд., перераб. – М., Л.: Госиздат техн.-теоретич. лит-ры, 1949. – 428 с.
25. Армстронг У.Е., Оатул А.А., Перри С.Х. Усовершенствованная методика замера полной кривой деформирования бетона при сжатии//Строительные материалы и технология строительного производства: Тр. Челябинского политехн. ин-та. – Челябинск, 1981. – № 262. – С. 3-9.
26. Бамбура А.М. Експериментальні основи прикладної деформаційної теорії залізобетону: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Харків, 2006. – 39 с.

27. Бич П.М. Экспериментально-теоретические исследования закритических характеристик бетона//Бетон и железобетон. – 1987. – № 3. – С. 26-27.
28. Голишев О.Б., Бамбура А.М. Курс лекцій з основ розрахунку будівельних конструкцій і з опору залізобетону. – К.: Логос, 2004. – 339 с.
29. Ивашенко Ю.А., Лобанов А.Д. Исследование процесса разрушения бетона при разных скоростях деформирования//Бетон и железобетон. – 1984. – № 11. – С. 14-15.
30. Рекомендации по методике определения параметров, характеризующих свойства различных бетонов при расчёте прочности нормальных сечений стержневых железобетонных элементов. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1984. – 32 с.
31. Холмянский М.М. О процессе деформирования бетона и развития одиночных поперечных трещин или разрезов при внецентренном сжатии бетонных элементов//Бетон и железобетон. – 1998. – № 3. – С. 15-18 (початок).
32. Холмянский М.М. О процессе деформирования бетона и развития одиночных поперечных трещин или разрезов при внецентренном сжатии бетонных элементов//Бетон и железобетон. – 1998. – № 4. – С. 25-27 (закінчення).
33. Роговой С.И. Нелинейное деформирование в теории железобетона и расчёт прочности нормальных сечений. – Полтава, 2002. – 183 с.
34. Таль К.Э. О деформативности бетона при сжатии//Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов: Сб. тр. ЦНИПС. – М.: Госстроиздат, 1955. – С. 202-207.
35. Бачинский В.Я., Бамбура А.Н., Ватагин С.С. Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии//Бетон и железобетон. – 1984. – № 10. – С. 18-19.
36. Дегтерев В.В. Деформативность бетона сжатой зоны в зависимости от её формы и характера армирования//Бетон и железобетон. – 1986. – № 8. – С. 42-43.
37. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряжённое и деформированное состояние сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 260 с.
38. Прочность, структурные изменения и деформации бетона/Гвоздев А.А., Яшин А.В., Петрова К.В. и др.; Под. ред. А.А.Гвоздева. – М.:Стройиздат, 1978. – 297 с.
39. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс: Учеб. для вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
40. Бондаренко В.М., Суворкин Д.Г. Железобетонные и каменные конструкции: Учеб. для студентов вузов по спец. “Пром. и гражд. стр-во”. – М.: Высш. шк., 1987. – 384 с.
41. Залізобетонні конструкції: Підручник/А.Я.Барашиков, Л.М.Буднікова, Л.В.Кузнецов та ін.; За ред. А.Я.Барашикова. – К.:Вища шк., 1995. – 591 с.
42. Залізобетонні конструкції: Підручник/П.Ф.Вахненко, А.М.Павліков, О.В.Горик та ін.; За ред. П.Ф.Вахненко. – К.:Вища шк., 1999. – 508 с.
43. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. – Харьков: ХГУ, 1968. – 324 с.
44. Щербаков Е.Н., Ажиудинов С.С. К оценке быстроснатекающей части деформаций ползучести бетона//Бетон и железобетон. – 1994. – № 6. – С. 27-30.

45. Дорофеев В.С., Барданов В.Ю. Расчёт изгибаемых элементов с учётом полной диаграммы деформирования бетона: Монография. – Одесса: Изд-во ОГАСА, 2003. – 210 с.
46. Соломенцев Г.Г. О закономерностях продольного деформирования бетона при осевом сжатии//Бетон и железобетон. – 1971. – № 4. – С. 2-4.
47. Красновский Р.О., Кроль И.С., Тихомиров, С.А. Аналитическое описание диаграммы деформирования бетонов при кратковременном статическом сжатии//Исследования в области измерений механических свойств материалов: Тр. ВНИИФТРИ. – М, 1976. – С. 58-65.
48. Ящук В.Е. К описанию диаграмм сжатия и разгрузки бетона//Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1982. – № 3. – С. 5-11.
49. Совгира В.Н. Влияние масштабного эффекта на напряжённо-деформированное состояние и прочность внецентренно сжатых коротких бетонных элементов: Дис. ... канд. техн. наук. – Одесса, 1989. – 20 с.
50. ЕКБ-ФИП. Международные рекомендации для расчёта и осуществления обычных и предварительно напряжённых железобетонных конструкций (русский перевод). – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1979. – 96 с.
51. Кодекс-образец ЕКБ-ФИП для норм по железобетонным конструкциям: Пер. с франц. Л.В.Еленской/Под ред. А.А.Гвоздева, С.М.Крылова, Ю.П.Гущи и др. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1984. – Том II. – 284 с.
52. prEN 1992-1 (Final draft, October 2001). Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings. – Brussels, 2002. – 230 p.
53. Байков В.Н., Горбатов С.В., Димитров З.А. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей//Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1977. – № 6. – С. 15-18.
54. Бабич В.И., Кочкарёв Д.В. Расчёт элементов железобетонных конструкций деформационным методом // Бетон и железобетон. – 2004. – № 2. – С. 12-16.
55. Бамбура А.М. Аналітичне описання діаграми механічного стану для залізобетонних конструкцій//Будівельні конструкції: Зб. наук. праць (у 2-х томах). – К.: НДБК, 2003. – Вип. 59. – Том 1. – С.131-136.
56. Бачинский В.Я., Пешкова И.Н. К использованию полной диаграммы сжатия бетона при расчёте внецентренно сжатых железобетонных элементов таврового профиля//Строительные конструкции: Межвед. науч.-техн. сб. – Киев: Будівельник, 1989. – Вып. 42. – С. 89-95.
57. Гольшев А.Б., Бачинский В.Я. К разработке прикладной теории расчёта железобетонных конструкций//Бетон и железобетон. – 1985. – № 6. – С. 16-18.
58. Методические рекомендации по уточнённому расчёту железобетонных элементов с учётом полной диаграммы сжатия бетона //А.Н.Бамбура, В.Я.Бачинский, Н.В.Журавлёва и др. – К.: НИИСК Госстроя СССР, 1987. – 25 с.
59. Вахненко П.Ф. Про деформативність бетону // Сталезалізобетонні конструкції: дослідження, проектування, будівництво, експлуатація: Зб. наук. ст. – Кривий Ріг, 1998. – С. 43-45.
60. Вахненко П.Ф., Кондель В.Н. Напряжения и деформации неармированного и армированного бетона при сжатии // Совершенствование железобетонных конструкций, работающих на сложные виды деформаций, и их внедрение в строительную практику: Тез. докл. респуб. науч.-техн. конф. Часть 1. – Полтава, 1989. – С. 34-35.

61. Гуца Ю.П., Лемыш Л.Л. К совершенствования расчёта деформаций железобетонных элементов//Напряжённо-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР/Под ред. С.М. Крылова и Т.А. Мухамедиева. – М.: НИИЖБ, 1986. – С. 26-39.
62. Гуца Ю.П., Лемыш Л.Л. Расчёт деформаций конструкций на всех стадиях при кратковременном и длительном нагружениях//Бетон и железобетон. – 1985. – № 11. – С. 13-16.
63. Лемыш Л.Л. Расчёт железобетонных конструкций с использованием полных диаграмм бетона и арматуры//Бетон и железобетон. – 1991. – № 7. – С. 21-23.
64. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры//Напряжённо-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР/Под ред. С.М. Крылова и Т.А. Мухамедиева. – М.: НИИЖБ, 1986 – С. 7-25.
65. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.А. К построению методики расчёта стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов//Совершенствование методов расчёта статически неопределимых железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР. – М.: НИИЖБ, 1987. – С. 4-24.
66. Кожевников В.М. Расчёт поперечных сечений при моделировании на ЭВМ действия кратковременной динамической нагрузки//Бетон и железобетон. – 1995. – № 3. – С. 17-20.
67. Пирадов А.Б., Аробелидзе В.И., Хуцишвили Т.Г. К расчёту несущей способности внецентренно сжатых элементов//Бетон и железобетон. – 1986. – № 1. – С. 43-44.
68. Кретов В.И. Об использовании логарифмической зависимости между напряжениями и деформациями сжатия для высокопрочных бетонов//Вопросы надёжности железобетонных конструкций: Тез. докл. к обл. науч.-техн. сем-ру (октябрь, 1976 г.); Под общ. ред. А.С. Лычева. – Куйбышев, 1976. – С. 74-78.
69. Справочник проектировщика. Сборные железобетонные конструкции/Под общ. ред. В.И. Мурашёва. – М.: Госиздат, 1959. – 603 с.
70. Онищик Л.И. Каменные конструкции. – М.: Госстройиздат, 1939.
71. Маилян Л.Р. Влияние армирования и эксцентриситета сжимающего усилия на деформативность бетона и характер диаграммы сжатия//Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона. – Ростов-на Дону, 1979. – С. 70-82.
72. Маилян Л.Р., Рубен Г.К. Об использовании в расчётах железобетонных элементов диаграммы « σ - ε » бетонных призм//Совершенствование конструкций сельскохозяйственного строительства на Северном Кавказе. – Ростов-на-Дону, 1984. – С. 134-138.
73. Расторгуев Б.С. Упрощённая методика получения диаграмм деформирования стержневых элементов в стадии с трещинами//Бетон и железобетон. – 1993. – № 5. – С. 22-24.
74. Давыдов Н.Ф., Донченко О.М. Экспериментально-теоретическое исследование сопротивления бетона при внецентренном и местном сжатии//Железобетонные конструкции. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964. – Вып. 1 (30). – С. 18-20.
75. Зак М.Л., Гуца Ю.П. Аналитическое представление диаграммы сжатия бетона//Совершенствование методов расчёта статически неопределимых железобетонных конструкций: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР. – М.: НИИЖБ, 1987. – С. 103-107.

76. Михайлов В.В. Расчёт прочности нормальных сечений изгибаемых элементов с учётом полной диаграммы деформирования бетона//Бетон и железобетон. – 1993. – № 3. – С. 26-27.
77. Михайлов В.В., Емельянов М.П., Дудолодов Л.С., Митасов В.М. Некоторые предложения по описанию диаграммы деформаций бетона при загрузении//Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1983. – № 2. – С. 23-27.
78. Туркалов Б.Ф., Таинг Б. К вопросу о расчёте стержневых железобетонных элементов с учётом полных диаграмм деформирования материалов//Бетон и железобетон. – 2004. – № 5. – С. 23-27.
79. Everard M. Ultimate strength design service – ability a unified method for reinforced concrete bridge design//ACI Journal. Pub. SP – 23, April, 1967. – P. 10-19.
80. Яшин А.В. О некоторых деформативных особенностях бетона при сжатии//Теория железобетона: Сб. науч. тр. НИИЖБ Госстроя СССР/Под ред. К.В.Михайлова, С.А.Дмитриева. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 131-137.
81. Остапенко А.Ф. Универсальная зависимость для диаграмм деформирования бетона, арматуры и железобетонных конструкций//Бетон и железобетон. – 1992. – № 7. – С. 23-24.
82. Залесов А.С., Мирсаяпов И.Т. Расчёт изгибаемых элементов на выносливость с учётом аналитических диаграмм деформирования бетона и арматуры//Бетон и железобетон. – 1993. – № 4. – С. 22-24.
83. Залесов А.С., Чистяков Е.А. Гармонизация отечественных нормативных документов с нормами ЕКБ-ФИП//Бетон и железобетон. – 1992. – № 10. – С. 2-4.
84. Залесов А.С., Чистяков Е.А. Деформационная расчётная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил//Бетон и железобетон. – 1996. – № 5. – С. 16-18.