

## УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НДС ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С НОРМАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Азизов Т.Н.

*Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины*

---

### Анализ публикаций и постановка задачи

Крутильная жесткость отдельных элементов пространственно деформирующихся систем (каркасы зданий, мостовые сооружения, ребристые монолитные и сборные перекрытия) влияет на перераспределение нагрузок между этими элементами. Крутильная жесткость в свою очередь зависит от наличия трещин. При действии больших крутящих моментов в железобетонных балках образуются пространственные спиральные трещины. Изучению жесткости элементов с такими трещинами посвящено немало работ, основными из которых являются работы Н.И. Карпенко и его учеников [5, 6].

В [9] показано, что в плитно-ребристых системах при действии изгиба с кручением в ребрах могут образовываться лишь нормальные и наклонные трещины, но и такие трещины влияют не только на изгибные, но и на крутильные жесткости ребер. Этот факт подтвержден экспериментальными исследованиями [4].

Кроме того, в работах [8, 9] показано, что перераспределение локальной нагрузки зависит практически одинаковым образом как от изгибной, так и от крутильной жесткостей отдельных балок (ребер) плитно-ребристых систем. Однако, исследования изгибных жесткостей при трещинообразовании значительно опережают аналогичные исследования крутильных жесткостей, а исследования крутильных жесткостей при наличии только нормальных трещин находится только на начальной стадии. Это работы автора настоящей статьи, работы проф. Яременко А.Ф. [1-3, 10]. Кроме того, в названных работах не учитываются нелинейные свойства бетона.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является развитие методики определения крутильных жесткостей железобетонных элементов с нормальными трещинами и ее распространение на расчеты с учетом нелинейных свойств бетона.

### Изложение основного материала

В работах автора [1-3] предложена методика определения крутильной жесткости элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами. При этом после мысленного рассечения продольной арматуры передача крутящего момента с блока на блок, отделенный трещинами, осуществляется через сжатую от изгиба зону. В вышеназванных работах НДС элемента прямоугольного сечения при приложении крутящего момента на части поперечного сечения предложено рассматривать с помощью рассечения стержня на полосы (стержни). При этом вертикальные усилия, действующие по плоскости рассечения, условно сосредоточены на боковых гранях полос (рис. 1). Это в известной степени приближенная модель, однако она имеет достаточную для многих практических расчетов точность. На рис. 1. условная заделка стержня означает середину блока между двумя смежными нормальными трещинами, длина которого равна  $L$ .

При такой схеме деформирования вертикальные усилия слева и справа каждой полосы равны между собой. В случае проявления пластических свойств бетона на растянутой стороне полосы

(от действия крутящего момента) вертикальные усилия будут отличаться от усилий на сжатой стороне. Поэтому следует вывести уравнения, в которых в каждом  $i$ -том продольном сечении будут действовать следующие неизвестные усилия: погонные касательные усилия  $\tau_i(x)$ , погонные вертикальные усилия слева  $S_{i,l}(x)$  и справа  $S_{i,r}(x)$ .

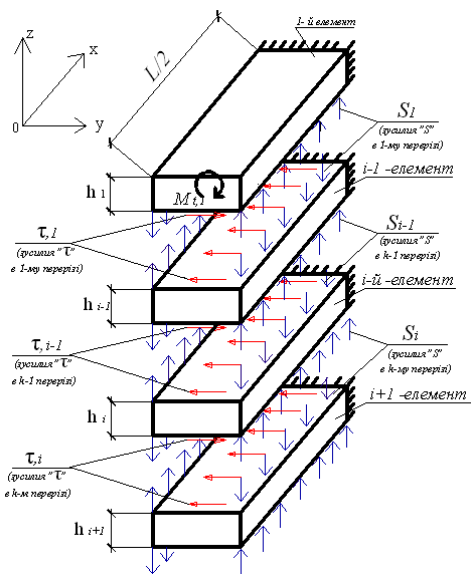


Рис. 1. Усилия, действующие по плоскости рассечения стержня, разделенного на  $n$  слоев

Для определения неизвестных имеется три достаточных условия совместности деформаций сверху и снизу  $i$ -той плоскости сечения. Для упрощения пояснения рассмотрим двухслойную модель, т.е. когда элемент рассекается на две полосы. Толщина верхней полосы равна высоте сжатой от изгиба зоны, толщина нижней (второй) полосы равна высоте нормальной трещины. Тогда будем иметь одну плоскость сечения. Деформации и усилия в плоскости рассечения верхнего стержня показаны на рис. 2.

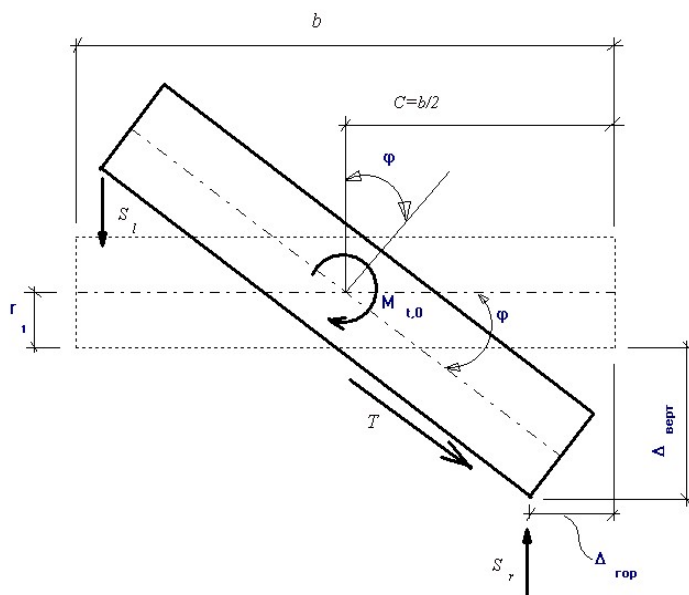


Рис. 2. Схема усилий и деформаций верхней отсеченной полосы

Как видно из рис. 2, отличие от схемы усилий по [1] состоит в том, что вертикальные усилия слева  $S_l$  и справа  $S_r$  имеют разные величины. Для определения трех неизвестных функций усилий в этом частном случае имеются следующие условия совместности деформаций: равенство деформаций (первой производной от соответствующих перемещений) верхнего и нижнего стержней в горизонтальном направлении (рис. 2):  $\Delta_{\text{гор},1}^I = \Delta_{\text{гор},2}^I$ ; равенство деформаций полос сверху и снизу от секущей плоскости для левых граней полос  $\Delta_{l,1}^I = \Delta_{l,2}^I$ ; равенство деформаций полос сверху и снизу от секущей плоскости для правых граней полос  $\Delta_{r,1}^I = \Delta_{r,2}^I$ .

Горизонтальные перемещения  $\Delta_{\text{гор}}$  складываются из (рис. 2): перемещений от сдвига в результате действия касательных сил  $T(x)$ ; перемещений от поворота полосы, вызванного действием внешнего момента  $M_{t,0}$ , касательных сил  $T(x)$  и вертикальных сил слева  $S_l(x)$  и справа  $S_r(x)$ . Вертикальные перемещения слева  $\Delta_{\text{верт},l}$  и справа  $\Delta_{\text{верт},r}$  складываются из перемещений от сжатия (растяжения) волокон полос в вертикальном направлении в результате действия вертикальных сил соответственно на левой и правой гранях полос; перемещений от поворота полосы, вызванного действием внешнего момента  $M_{t,0}$ , касательных сил  $T(x)$  и вертикальных сил слева  $S_l(x)$  и справа  $S_r(x)$ .

Составив уравнения для перемещений стержней (полос) и приравняв первые производные перемещений верхнего стержня (деформаций верхнего стержня) соответствующим деформациям нижнего стержня, получим систему дифференциальных уравнений для определения трех неизвестных функций:

$$\begin{aligned} \left( \frac{r_1}{G \cdot b} + \frac{r_2}{G \cdot b} \right) T'' + \left( \frac{r_1^2}{GJ_1} + \frac{r_2^2}{GJ_2} \right) T + \left( \frac{C \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{C \cdot r_2}{GJ_2} \right) Q_l + \left( \frac{C \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{C \cdot r_2}{GJ_2} \right) Q_r &= \frac{r_1}{GJ_1} M_{t,0} \\ \left( \frac{C \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{C \cdot r_2}{GJ_2} \right) T + \left( \frac{r_1}{EA_l} + \frac{r_2}{EA_l} \right) Q_l'' + \left( \frac{C^2}{GJ_1} + \frac{C^2}{GJ_2} \right) Q_l + \left( \frac{C^2}{GJ_1} + \frac{C^2}{GJ_2} \right) Q_r &= \frac{C}{GJ_1} M_{t,0} \\ \left( \frac{C \cdot r_2}{GJ_2} - \frac{C \cdot r_1}{GJ_1} \right) T - \left( \frac{r_1}{EA_r} + \frac{r_2}{EA_r} \right) Q_r'' - \left( \frac{C^2}{GJ_1} + \frac{C^2}{GJ_2} \right) Q_r - \left( \frac{C^2}{GJ_1} + \frac{C^2}{GJ_2} \right) Q_l &= -\frac{C}{GJ_1} M_{t,0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое уравнение системы (1) составлено из условия равенства перемещений в горизонтальном направлении. Второе уравнение – из условия равенства вертикальных перемещений на левых гранях полос, а третье уравнение – из условия равенства вертикальных перемещений на правых гранях (рис. 2) полос.

В системе (1) приняты обозначения:

$r_1, r_2$  – половина высоты сечения соответственно верхней (первой) и нижней полосы;

$G$  – модуль сдвига материала стержня;

$b$  – ширина сечения стержня (рис. 2);

$T = T(x)$  – суммарные касательные силы, связанные с погонными касательными силами  $\tau(x)$  (рис. 1) дифференциальным соотношением  $T(x) = \int_0^x \tau(x)dx$ ;

$GJ_1, GJ_2$  – крутильные жесткости соответственно первой (верхней) и второй (нижней) отсеченных полос;

$Q_l, Q_r$  – суммарные вертикальные силы соответственно слева и справа стержня, связанные с погонными вертикальными силами  $S_l, S_r$  (рис. 2) дифференциальными соотношениями:  $Q_l(x) = \int_0^x S_l(x)dx$ ,  $Q_r(x) = \int_0^x S_r(x)dx$ ;

$M_{l,0}$  – внешний крутящий момент (рис. 2);

$C = b/2$  – половина ширины сечения стержня;

$EA_l, EA_r$  – жесткость условных стерженьков единичной длины соответственно слева и справа отсеченной полосы. Эти условные стержни имитируют сжатие (растяжение) волокон отсеченных полос в вертикальном направлении. Их размер в направлении продольной оси полос принимается равным единице, а ширина (размер в направлении ширины полос) подбирается из условия равенства перемещения условного стержня и перемещения волокон отсеченных полос, полученных на основе расчетов по МКЭ (см. [1, 2]).

При делении стержня на большее число полос подход к решению задачи не изменяется.

Как видно из системы дифференциальных уравнений (1), ее отличие от системы аналогичных уравнений в [1] состоит в том, что здесь вместо одной неизвестной функции вертикальных сил  $S(x)$  присутствуют две неизвестные функции вертикальных сил слева  $S_l(x)$  и справа  $S_r(x)$ .

Граничные условия для системы дифференциальных уравнений (1) имеют вид:

$$Q_r(0) = 0; Q_r'(l) = 0; Q_l(0) = 0; Q_l'(l) = 0; T(0) = 0; T'(l) = 0. \quad (2)$$

В выражении (2) в отличие от рис. 2 через  $l$  обозначена половина расстояния между двумя нормальными трещинами.

Для расчета в упругой постановке система уравнений (1) с граничными условиями (2) решается достаточно просто, причем это решение может быть как замкнутым, так и численным. При расчете с учетом пластических свойств бетона предположим, что растянутый бетон деформируется по закону Прандля. При таком подходе добавится одна неизвестная величина и еще одно уравнение к системе (1). Рассмотрим эти факторы подробнее. Пусть на растянутой стороне (на рис. 2 левая сторона) напряжения на некоторой зоне длиной  $a$  достигли предела прочности бетона на растяжение  $R_{bt}$  (рис. 3).

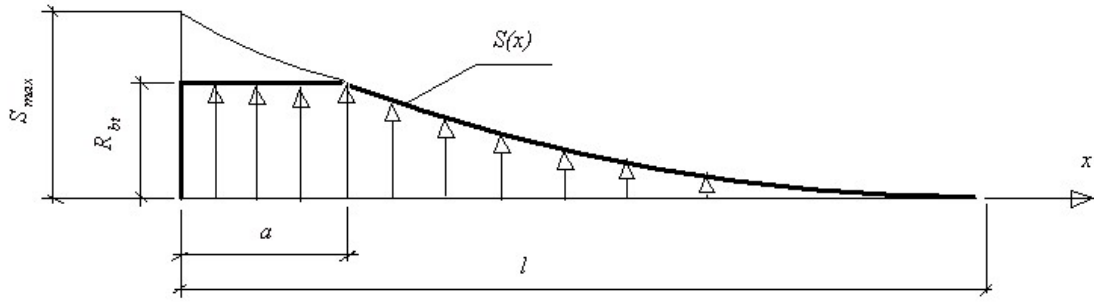


Рис. 3. Схема к учету пластических свойств бетона

Тогда в качестве дополнительной неизвестной будет выступать длина  $a$  пластической зоны. В качестве дополнительного уравнения к системе (1) следует добавить уравнение равенства площадей эпюр вертикальных усилий слева и справа отсеченной полосы, т.е. условия

$$Q_l(l) = Q_r(l), \text{ что равносильно выражению } \int_0^l S_l(x)dx = \int_0^l S_r(x)dx. \quad (3)$$

Пути решения задачи могут быть различными. При наличии нескольких отсеченных полос проще всего задача может быть решена численно. Одним из способов решения может быть использование метода коллокаций. Для этого функции вертикальных усилий слева и справа отсеченной полосы представим в виде степенных рядов с неопределенными коэффициентами:

$$\begin{aligned} S_l(x) &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k; \\ S_r(x) &= b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_kx^k; \\ T(x) &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_kx^k. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно методу коллокаций коэффициенты  $a_1 \dots a_k$ ,  $b_1 \dots b_k$  и  $c_1 \dots c_k$  определяются следующим образом. Система уравнений (1) и (3) с подстановкой (4) записывается столько раз, сколько неизвестных постоянных принимается в рядах (4), т.е.  $k$  раз. При этом координаты  $x$  принимаются в определенных точках, подбираемых расчетчиком. Так, для аппроксимации функции на растянутой грани полосы в виде, показанном на рис. 3, обязательными условиями будут следующие:

$$S_l(0) = R_{bt}; S_l(a) = R_{bt}; Q_l(0) = 0; Q_l'(l) = S(l) = 0. \quad (5)$$

Т.е. только для выполнения обязательных условий (5) следует принять 4 неизвестные постоянные в рядах (4). Кроме того, на участке  $a < x \leq l$  следует подобрать еще несколько точек коллокаций. Если, например, взять еще три точки, то всего число неопределенных постоянных будет равно семи. Очевидно, что чем большее количество неопределенных постоянных (4) будет принято, тем более точным будет результат. Величину пластической зоны  $a$  предлагается определять двумя способами. Первый способ заключается в том, что в систему уравнений (1) и (3) подставляются ряды (4) с дополнительными условиями, и при  $x = a$  выполняется условие  $S_l(a) = R_{bt}$ . При этом решение системы уравнений (1) и (3) производится один раз и определяются неизвестные коэффициенты (4) и величина  $a$ .

Однако, система уравнений при таком подходе не является линейной, т.к. подстановка  $x = a$  в ряды (4) приводит к тому, что неизвестная  $a$  имеет степень выше единицы. Второй способ – итерационный. При этом задается  $a$  как некая известная величина. Производится расчет – решается система уравнений (1) и (3), определяются неопределенные коэффициенты  $a_1 \dots c_k$  и величины усилий сравниваются с усилиями, определенными на предыдущей итерации. Схождением процесса итераций считается равенство с заданной наперед погрешностью усилий на последней и предыдущей итерации.

Как показывают исследования, для получения приемлемой для практических расчетов точности вполне достаточно принять величину  $k$  равной 7-9. При этом для рассмотренного выше случая деления стержня на две полосы получается система 28-36 линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов рядов (4).

### **Выводы и перспективы исследований**

Предложенная методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние элемента с нормальными трещинами при кручении как в упругой постановке, так и с учетом пластических свойств бетона. При учете нелинейной диаграммы деформирования бетона при растяжении подход к решению задачи принципиально не изменяется. При этом принимается большее количество точек коллокаций на участке пластического растяжения бетона. В качестве перспективы следует распространить предложенный метод на другие формы поперечного сечения стержня с нормальными трещинами.

### **Литература**

1. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами // Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7. Том 1. – Київ: ДерждорНДЦ, 2007. – С. 3-8.
2. Азизов Т.Н. Общий подход к определению крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 17., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – С. 92-99.
3. Азизов Т.Н., Срибняк Н.Н. Прочность при кручении железобетонных элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 17., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – С. 100-104.
4. Горнов В.Н. Исследование прочности и жёсткости сборных железобетонных перекрытий из лотковых настилов // Материалы и конструкции в современной архитектуре. – М.: Стройиздат, 1950.
5. Елагин Э.Г. Расчет перемещений железобетонных стержней прямоугольного сечения на стадиях работы с трещинами при совместном кратковременном действии моментов и продольной силы/ Э.Г. Елагин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 4. – С. 26-31.
6. Карпенко Н.И. общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
7. Лантух-Лященко А.И. Развитие дискретно-континуальных методов расчета комбинированных систем: Автореф. дисс. ... докт. техн. наук:05.23.17/ КИСИ. – К., 1992. – 30 с.
8. Улицкий Б.Е., Потапкин А.А, Руденко В.И., Сахарова И.Д., Егорушкин Ю.М. Пространственные расчёты мостов. – М.: Транспорт, 1967. – 404 с.
9. Яременко А.Ф., Чучмай А.М., Яременко Н.А. Инженерная методика определения крутильной жесткости железобетонных балок с нормальными трещинами // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 33. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 146-151.