

**ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ
УДАРНИКА ПРИ ДИНАМІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ДОРОЖНЬОГО ОДЯГУ
ЯК ПРУЖНЬОГО НАПІВПРОСТОРУ**

Булах Є.О.

Національний транспортний університет

Для побудови математичної моделі було взято установку динамічної дії «УДВО», яку розроблено в Національному транспортному університеті. Перед створенням динамічного навантаження ударник „УДВО” піднімається і фіксується у верхньому положенні (рис. 1).

Рух ударника починається з вільного падіння до контакту гумової підшви з покриттям. При цьому на ударник діє сила тяжіння

$$G = mg, \quad (1)$$

де m – маса ударника, кг;

g – прискорення вільного падіння, м/с².

Швидкість руху ударника можна знайти з виразу

$$\frac{dV}{dt} = g, \quad (2)$$

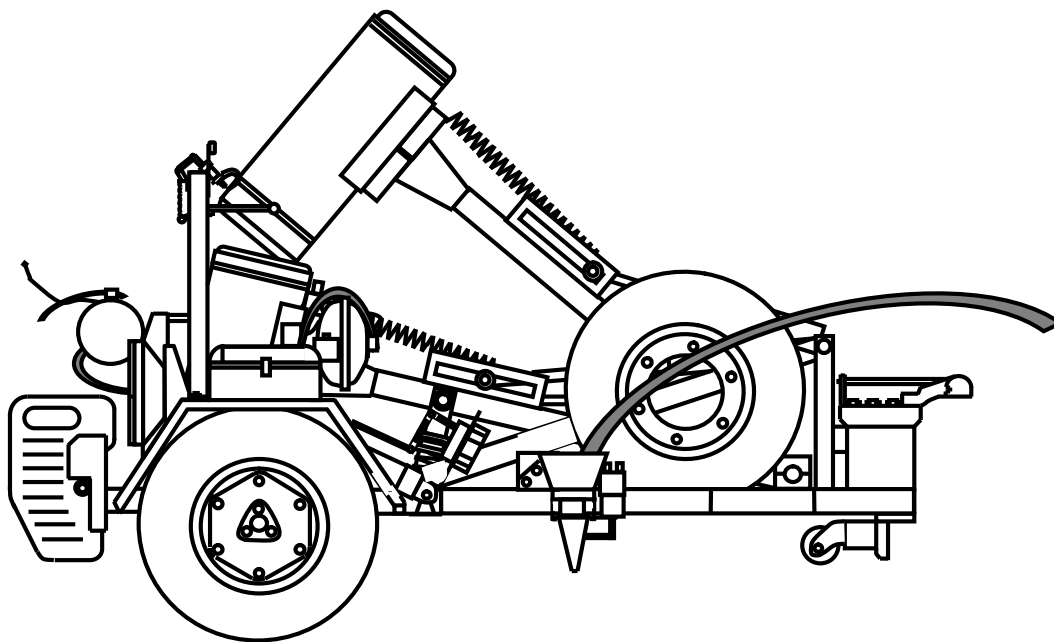


Рисунок 1 – Фіксація ударника у зведеному положенні

$$V = gt. \quad (3)$$

Переміщення ударника можна знайти з виразу

$$\frac{dS}{dt} = V, \quad (4)$$

$$S = \frac{gt^2}{2} - h_0, \quad (5)$$

де h_0 – висота під'йому ударника

В момент контакту гумової підошви з покриттям

$$S = 0 \quad (6)$$

і з виразу (5) випливає

$$\frac{gt^2}{2} = h_0. \quad (7)$$

Звідси визначимо тривалість вільного падіння ударника:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (8)$$

Підставляючи цей вираз в (3), отримаємо величину швидкості падіння ударника в момент контакту гумової підошви з покриттям

$$V_1 = \sqrt{2gh_0}. \quad (9)$$

Результати розрахунків за формулами (8) і (9) наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Результати розрахунку тривалості вільного падіння ударника і його швидкості в момент контакту гумової підошви з покриттям

$h_0, \text{м}$	$t_1, \text{с}$	$V_1, \text{м/с}$
0,8	0,403855	3,961818

Після контакту з покриттям ударник відскокує вгору. Як показали експериментальні дослідження, висота відскоку h_e може коливатися від 1 до 20 см. Тоді час польоту ударника при відскоку (від першого удару до другого) визначатиметься виразом:

$$t_e = 2\sqrt{\frac{2h_e}{g}}. \quad (10)$$

Результати розрахунків за формулою (10) наведено у таблиці 2.

Таблиця 2 – Результати розрахунку тривалості відскоку ударника

$h_{в,м}$	$t_{в, с}$	$D, с$
0,01	0,090305	0,037405
0,02	0,127710	0,028702
0,03	0,156412	0,024197
0,04	0,180609	0,021318
0,05	0,201928	0,019273
0,06	0,221201	0,017723
0,07	0,238924	0,016496
0,08	0,255420	0,015494
0,09	0,270914	0,014654
0,10	0,285569	0,013938
0,11	0,299507	0,013318
0,12	0,312825	0,012774
0,13	0,325598	0,012291
0,14	0,337889	0,011859
0,15	0,349749	

В таблиці 2 наведено також значення різниці D тривалості відскоку при зміні висоти відскоку на 1 см. Найменша різниця має місце при висоті відскоку 0,15 м. Приймаючи відносну похибку визначення $De = 0,05$, отримуємо необхідну точність визначення часу $0,011859 с \cdot 0,05 = 0,000593 с$. Величина цього часового параметру обумовлює чутливість давача вимірювання часу і швидкодію передавального каналу давач-контролер-портативний комп'ютер. Тактову частоту генерації імпульсів необхідно прийняти 10^4 Гц.

Визначивши кінематичні характеристики ударника «УДВО», а саме формулу для визначення почасткової швидкості ударника при дотиканні до покриття, можна покласти в основу наведеного нижче розв'язання задачі Герца про взаємодію тіл при ударі стосовно ударника «УДВО» та дорожнього покриття.

Як відомо, при оцінці деформативності дорожнього одягу використовують загальний модуль пружності, значення якого знаходять за формулою:

$$E = \frac{pD(1-\mu^2)}{l}, \quad (11)$$

де p – тиск жорсткого штампу на покриття;
 D – діаметр жорсткого штампу;
 μ – коефіцієнт Пуасона напівпростору;
 l – пружній прогин покриття під штампом.

Вираз (11) можна подати у вигляді:

$$E = \frac{4P(1 - \mu^2)}{\pi D l}, \quad (12)$$

де P – навантаження на штамп;

звідки знайдемо залежність між силою тиску P і прогином покриття l :

$$P = \frac{\pi E D l}{4(1 - \mu^2)}. \quad (13)$$

Цю залежність будемо використовувати для складання рівняння руху ударника «УДВО» після дотикання до поверхні покриття. Дійсно, в зоні контакту підшви ударника з покриттям виникає сила реакції (рис. 2), величина якої чисельно дорівнює силі P .

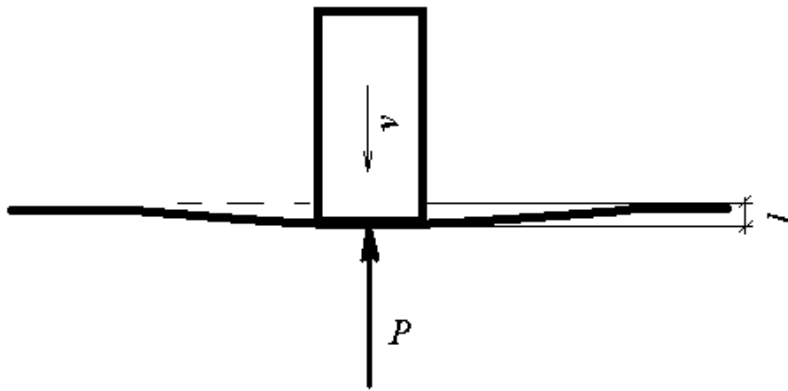


Рисунок 2 – До складання рівняння руху ударника при контакті з покриттям

Позначимо

$$A = \frac{\pi E D}{4(1 - \mu^2)}. \quad (14)$$

тоді вираз (13) матиме вигляд:

$$P = Al. \quad (15)$$

Цей вираз відрізняється від відомих виразів традиційної моделі Герца [3, 4].

За другим законом Ньютона

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = -P, \quad (16)$$

де m – маса ударника.

З огляду на (15), матимемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 l}{dt^2} + k^2 l = 0, \quad (17)$$

де

$$k = \sqrt{\frac{A}{m}}, \quad (18)$$

з такими початковими умовами:

$$t = 0; l = 0; \frac{dl}{dt} = V = V_0, \quad (19)$$

де V_0 – початкова швидкість ударника перед дотиканням до покриття.

Розв'язком рівняння (17) є функція

$$l = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (20)$$

Швидкість ударника знайдемо з виразу

$$V = \frac{dl}{dt}, \quad (21)$$

$$V = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (22)$$

Сталі C_1 і C_2 знайдемо із початкових умов (19):

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{V_0}{k}. \quad (23)$$

Тоді для переміщення, швидкості та прискорення ударника матимемо вирази:

$$l = \frac{V_0}{k} \sin kt, \quad (24)$$

$$V = V_0 \cos kt, \quad (25)$$

$$a = -Vk_0 \sin kt. \quad (26)$$

Максимальний прогин покриття буде мати місце при повній зупинці ударника $V=0$ [1;2]. Прирівнюючи вираз (25) до нуля, знайдемо момент часу, коли це трапляється:

$$T = \frac{\pi}{2k}. \quad (27)$$

На рис. 3 наведено графіки залежності кінематичних характеристик ударника від часу. При їх побудові прийнято значення параметрів, наведених у таблиці 3.

З наведеного розв'язку слідує спосіб визначення модуля пружності дорожнього одягу. Якщо виміряти, наприклад, час τ удару, а не тривалість відскоку, як це здійснювалося у попередніх моделях УДВО, який буде в два рази більший, ніж час, визначений за формулою (27):

$$\tau = \frac{\pi}{k}, \quad (28)$$

то можна підрахувати величину параметра k :

$$k = \frac{\pi}{\tau}. \quad (29)$$

В свою чергу, з огляду на (29) можна знайти значення параметра A :

$$A = k^2 m, \quad (30)$$

Таблиця 3 – Розрахунок кінематичних характеристик ударника

μ	$E, \text{МПа}$	$D, \text{м}$	$m, \text{кг}$	κ	$T, \text{с}$	V_0	$t, \text{с}$	$l, \text{мм}$	$V, \text{м/с}$	$a, \text{м/с}^2$
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0	0	3,962	0
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00002	0,08	3,916	-4589
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00004	0,16	3,779	-9072
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00006	0,23	3,554	-13344
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00008	0,30	3,247	-17306
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00010	0,36	2,865	-20867
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00012	0,41	2,416	-23943
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00014	0,46	1,911	-26463
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00016	0,49	1,361	-28369
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00018	0,51	0,780	-29617
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00020	0,52	0,181	-30177
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00022	0,52	-0,422	-30037
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00024	0,50	-1,016	-29200
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00026	0,48	-1,585	-27685
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00028	0,44	-2,119	-25527
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00030	0,39	-2,603	-22777
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00032	0,34	-3,026	-19498
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00034	0,27	-3,379	-15766
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00036	0,20	-3,654	-11668
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00038	0,13	-3,844	-7300
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00040	0,05	-3,945	-2762
0,33	200	0,33	100	7625	0,000206	3,961818	0,00041	0	-3,962	-2

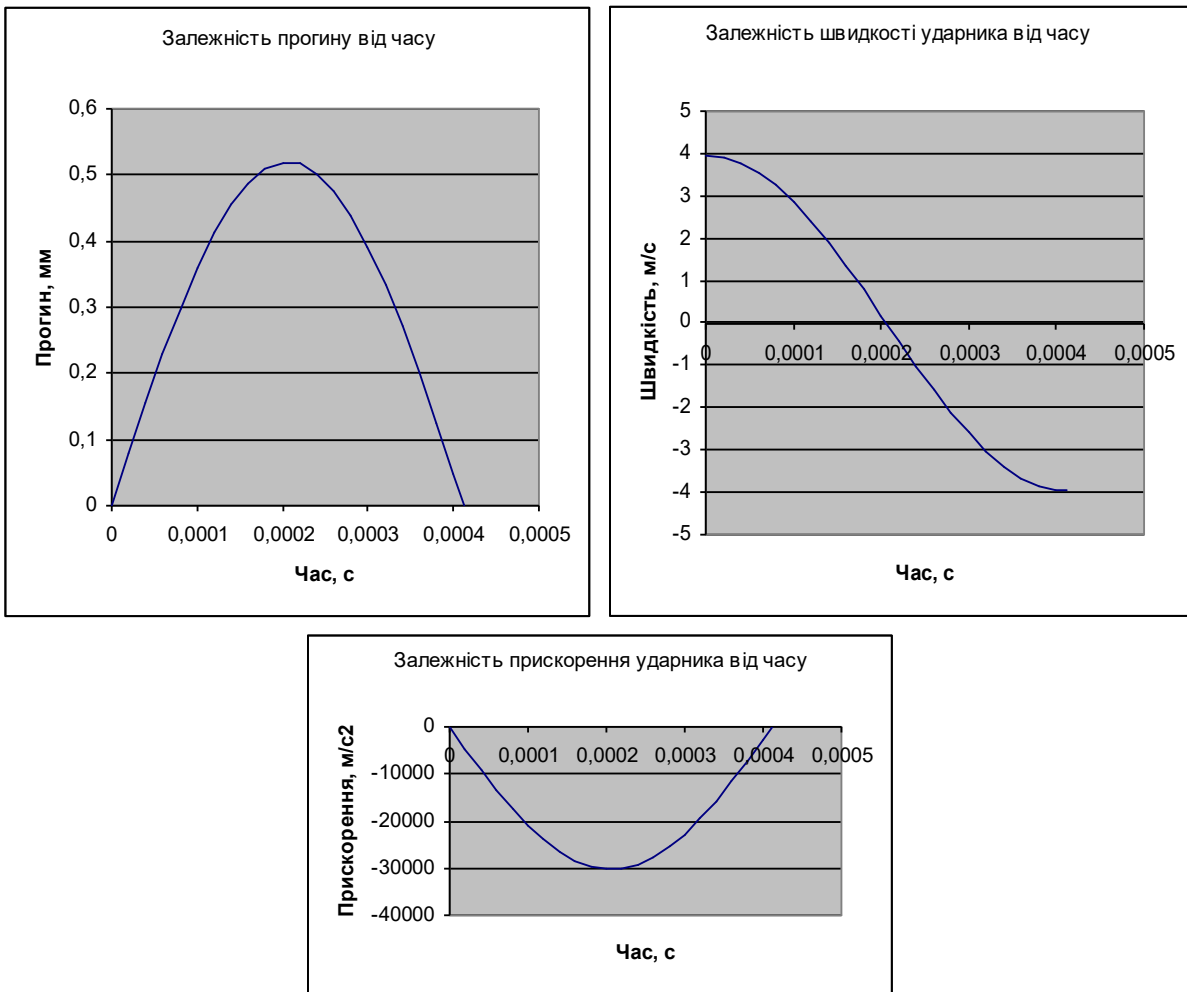


Рисунок 3 – Графіки залежності кінематичних характеристик ударника від часу

а з тим, з урахуванням виразу (14), і значення

$$E = \frac{4A(1-\mu^2)}{\pi D}. \quad (31)$$

Підрахунок значення E можна звести в одну формулу:

$$E = \frac{4\pi m(1-\mu^2)}{\tau^2 D}, \quad (32)$$

і виключити процес калібрування як УДВО, так і інших засобів вимірювань, що реалізують динамічний спосіб визначення загального модуля пружності дорожнього одягу.

Як вимірюваний параметр можуть використовуватися й інші кінематичні характеристики руху ударника.

Отримана математична модель дає змогу отримати залежності положення, швидкості та прискорення ударника від часу. Тривалість падіння ударника з верхньої точки кріплення з моменту початку контактування з покриттям становить близько 4 секунд. Тривалість відскоку ударника від покриття – від 0,09 до 0,35 с. Ці часові параметри використовувалися як вихідні дані для формування чутливості датчика вимірювання часу і швидкодії передавального каналу давач-контролер-портативний комп'ютер. Тактова частота генерації імпульсів прийнята 10^4 Гц, у той час, як на попередній моделі „УДВО” згадана частота не перевищувала 1КГц.

Література

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. М., Наука, 1977. – 224 с.
2. Кильчевский Н.А. Теория соударений. Киев, Наук. думка, 1969. – 246 с.
3. Бидерман В.Л. Теория удара. М., ГНТИМЛ, 1952. – 74 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний (гл. 8 Ударное взаимодействие). М., ВШ, 1972. – 416 с.