

## ВИЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ЖОРСТКОСТІ МОСТА ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ СТАТИЧНИХ ВИПРОБОВУВАНЬ

**Ігнатишин М.І.**

*Мукачівський технологічний інститут*

**Лучко Й.Й.**

*Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна*

---

**Актуальність теми.** Все гостріше постає питання врахування в проектуванні та реконструкції споруд реальних властивостей матеріалів як наземних конструкцій, так і основ споруд, зокрема мостів. Оскільки мостові конструкції експлуатуються протягом тривалого часу, то доцільно при їх розрахунку та випробовуванні оцінити фактичний резерв несної спроможності конструкції після проявлення її реальних властивостей. Чинні ДБН передбачають зменшення величини розрахункового опору в результаті довготривалих навантажень. Експериментальні дослідження підтверджують наявність впливу довготривалих навантажень на напружено-деформований стан (НДС) конструкцій, наявність перерозподілу зусиль в часі [1, 2]. Тому очевидна раціональність виконання подальших досліджень реальної роботи мостових конструкцій в умовах їх експлуатації з довготривалими навантаженнями.

В роботі [3] досліджено вплив зміни жорсткості через появу тріщин та необхідність врахування впливу повзучості на перерозподіл зусиль за умови довготривалих навантажень. Процеси, що приводять до старіння матеріалу [4, 5], утворення мікроскопічних тріщин [6] в макроскопічному плані проявляються як зміна жорсткості, зокрема циліндричної жорсткості моста.

При розрахунку будівельних, мостових конструкцій та вантажопідйомних машин застосовують як традиційні, так і метод скінчених елементів [7].

В даний час переважають числові методи розрахунку, ефективність яких обґрунтовано в [8]. Проте, коли є можливість отримати аналітичний розв'язок, навіть громіздкий і з застосуванням спрощеної математичної моделі, його варто отримати і застосувати для вивчення досліджуваного об'єкта. Формула аналітичного розв'язку надзвичайно інформаційно містка і корисна для усвідомлення закономірностей поведінки досліджуваного об'єкта.

**Постановка задачі, вихідні дані.** Метою даної праці є розгляд одної з моделей, що пов'язує циліндричну жорсткість залізобетонної плити, конструктивного елемента моста, та величину її прогину при навантаженні.

Застосуємо дані статичних випробовувань [9] як вихідні і пов'яжемо їх через математичну модель з механічною характеристикою конструкції, яку назовемо інтегральною циліндричною жорсткістю моста.

**Об'єктом дослідження** є статично навантажений міст (рис. 1).

**Предмет дослідження** – математична модель, що пов'язує результати статичних вимірювань, – статичне навантаження та величину прогину середини моста з механічною характеристикою конструкції, – інтегральною циліндричною жорсткістю моста.

Інтегральною циліндричною жорсткістю моста є жорсткість ізотропної залізобетонної плити, що має таку саму довжину і ширину як проїзна частина моста і величина прогину якої під дією заданого навантаження збігається з прогином моста.

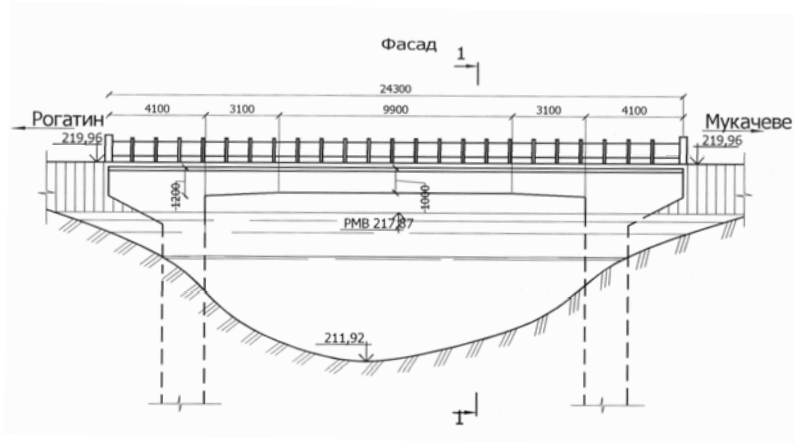


Рис. 1. Міст через р. Стара ріка

### Виклад основного матеріалу.

Представимо статично навантажений міст як ізотропну залізобетонну плиту ефективною товщиною  $h$ , що описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \cdot \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} q(x, y), \quad (1)$$

де  $D$  – циліндрична жорсткість плити,  $q(x, y)$  – питоме навантаження.

Розв'язок має вигляд:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right). \quad (2)$$

де

$$Y_i = A_i \cdot sh(\alpha y) + B_i \cdot ch(\alpha y) + C_i \cdot y \cdot sh(\alpha y) + D_i \cdot y \cdot ch(\alpha y) + \varphi_i(y) \quad (3)$$

та

$$\alpha = \frac{i\pi}{a}, \quad (4)$$

що задовольняє крайові умови на вільно опертих краях:

$$\begin{aligned} w(0) = w(a) &= 0; \\ M_1(0) = M_1(a) &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

та вільних краях

$$\begin{aligned} M_2(0) = M_2(b) &= 0; \\ V_2(0) = V_2(b) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Відповідно

$$M_1 = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (7)$$

$$M_2 = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (8)$$

$$V_2 = -D \cdot \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right),$$

де  $a$  - довжина плити,  $b$  - ширина плити.

У нових змінних  $(\eta, \xi)$ , -

$$\eta = \frac{x}{a}; \quad \xi = \frac{y}{b}. \quad (9)$$

що дозволяють компактно представити результати, диференціальне рівняння деформації плити:

$$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2 \cdot \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial^2 \eta \cdot \partial^2 \xi} + \frac{1}{b^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{1}{D} q(\eta, \xi). \quad (10)$$

Розв'язок представимо у вигляді:

$$w(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \cdot \sin(i\pi\eta), \quad (11)$$

де

$$Y_i = A_i \cdot sh(\alpha\xi) + B_i \cdot ch(\alpha\xi) + C_i \cdot y \cdot sh(\alpha\xi) + D_i \cdot y \cdot ch(\alpha\xi) + \varphi_i(\xi) \quad (12)$$

та

$$\alpha = \frac{b}{a} i\pi. \quad (13)$$

При  $q = const$

$$\varphi_i(\xi) = \frac{2q}{D} \cdot \frac{a^4}{(i\pi)^5} \cdot (1 - \cos(i\pi)) = \frac{2q}{D} \cdot \frac{a^4}{(i\pi)^5} \cdot (1 - (-1)^i) = const \quad (14)$$

Запишемо крайові умови:

$$\begin{aligned} w(0) &= w(1) = 0; \\ M_1(0) &= M_1(1) = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M_2(0) &= M_2(1) = 0; \\ V_2(0) &= V_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$M_1 = -D \cdot \left( \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right); \quad (17)$$

$$M_2 = -D \cdot \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \quad (18)$$

$$V_2 = -D \cdot \left( \frac{1}{b^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{1}{a^2 b} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right).$$

Розв'язок системи рівнянь (10) буде:

$$w(\eta, \xi) = \frac{2(1+\nu)\nu}{\pi^4} \cdot \frac{qa^5}{Db} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^i}{i^4 \cdot \left\{ \left[ \left( (3+\nu) \frac{a}{b} \right)^2 + [(1-\nu) \cdot i\pi]^2 \right] \cdot \text{sh}^2 \left( i\pi \frac{b}{a} \right) - [(1-\nu) \cdot i\pi]^2 \cdot \text{ch}^2 \left( i\pi \frac{b}{a} \right) \right\}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \text{sh} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) + 1 \right] \cdot \left[ \text{ch} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) - 1 \right] \cdot \text{sh}(\alpha\xi) + \\ & \frac{2}{1+\nu} \times \left\{ \text{sh} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) - \frac{i\pi(1-\nu)}{2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \left[ \frac{\nu^2 + 4\nu + 3^2}{\left[ (1-\nu) \cdot i\pi \cdot \frac{b}{a} \right]^2 + 1} \cdot \text{sh}^2 \left( i\pi \frac{b}{a} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \text{ch}^2 \left( i\pi \frac{b}{a} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \text{ch}(\alpha\xi) - \\ & - \frac{b}{a} \cdot \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} \cdot \text{sh} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \text{sh} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) \right] \cdot \xi \cdot \text{sh}(\alpha\xi) + \\ & + \frac{b}{a} \cdot \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} \cdot \left[ 1 + \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a}{b} \cdot \text{sh} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) \right] \cdot \left[ \text{ch} \left( i\pi \frac{b}{a} \right) - 1 \right] \cdot \xi \cdot \text{ch}(\alpha\xi) + \\ & + \frac{a}{b} \cdot \frac{(\nu+3)^2}{i\pi(1+\nu)\nu} \cdot \left( 1 - \text{ch}^2 \left( i\pi \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot i\pi \cdot \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)\nu} \right) \\ & \times \sin(i\pi\eta) \end{aligned} \right\} \times \quad (19)$$

Використовуючи співвідношення (19), запишемо формулу для визначення жорсткості плити, що пов'язана з експериментально визначеною деформацією плити, наприклад в центрі:

$$D = \frac{2\nu}{\pi^3} \cdot \frac{qa^4}{w(0,5;0,5)}. \quad (20)$$

Нижче розглянемо силові фактори, що діють в проїзній частині моста через Стару ріку (рис. 1).

На рис. 2а зображено поверхню, що описується формулою (29) і представляє деформацію проїздної частини залізобетонного моста, розташованого на автомобільній дорозі Мукачєво-Рогатин, під дією статичних випробувань. Міст навантажувався завантаженим баластом автомобілем КраЗ вагою 22 т та стріловим колісним краном КС вагою 24 т, максимальна загальна вага становила 46 т. Довжина моста в просвіт  $a = 16,10$  м, ширина моста  $b = 11,6$  м. Максимальний прогин моста становив  $0,48$  мм  $= 4,8 \cdot 10^{-4}$  м.

Інтегральна циліндрична жорсткість проїздної частини моста за формулою (20)  $D = 4,807 \cdot 10^9$  Н·м.

На рис. 2b зображено питомий згинальний момент в площині  $\eta = const$ , значення моменту в центрі  $M_1(0,5;0,5) = -7,83 \cdot 10^4$  Н.

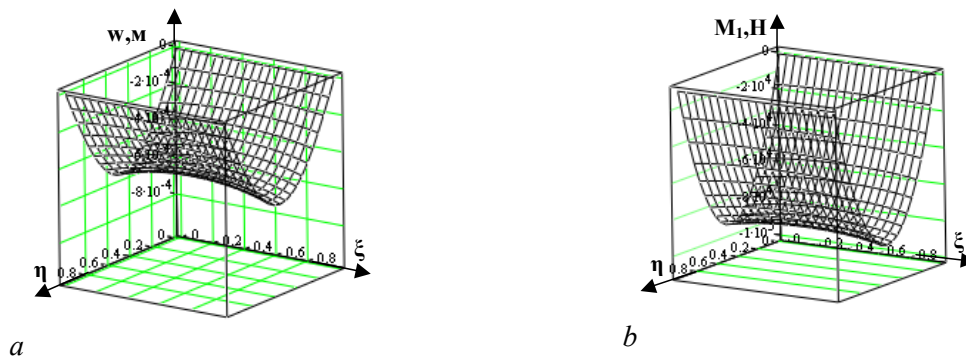


Рис. 2. Представлено поверхню, що описує деформацію проїздної частини залізобетонного моста під дією статичних випробувань (а) та питомий згинальний момент (b) в площині  $\eta = const$

На рис. 3а зображено питомий згинальний момент в площині  $\xi = const$ , значення моменту в центрі  $M_2(0,5;0,5) = -1,608 \cdot 10^4$  Н.

На рис. 3b зображено питомий крутний момент, значення моменту в центрі  $H(0,5;0,5) = 0$  Н та  $H(1;0) = H(0;1) = 1,81 \cdot 10^4$  Н,  $H(1;1) = H(0;0) = -1,81 \cdot 10^4$  Н відповідно.

На рис. 4а показано питому поперечну силу в площині  $\eta = const$ , значення на краях  $Q_1(0;0,5) = -1,639 \cdot 10^4$  Н/м,  $Q_1(1;0,5) = 1,639 \cdot 10^4$  Н/м відповідно, а на рис.4b також питому поперечну силу в площині  $\xi = const$ , значення на краях якої дорівнює:  $Q_2(0,5;0) = -3,004 \cdot 10^3$  Н/м,  $Q_2(0,5;1) = 3,004 \cdot 10^3$  Н/м відповідно.

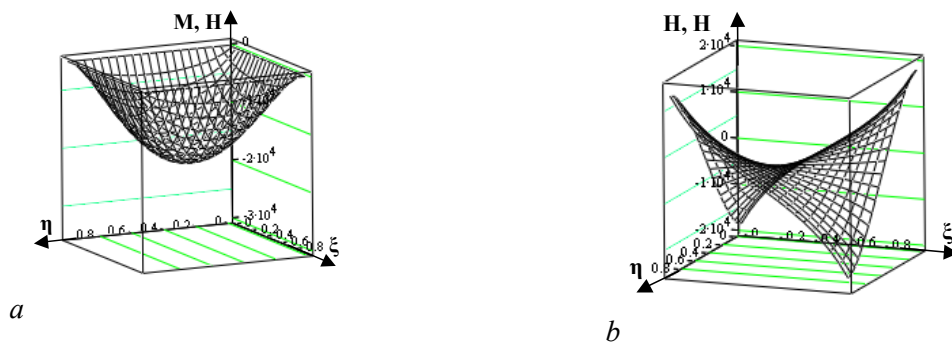


Рис. 3. Питомий згинальний (а) момент та крутний (b) моменти в площині  $\xi = const$



Рис. 4. Питома поперечна сила: *a* – в площині  $\eta = const$  ;  
*b* – в площині  $\xi = const$

Отже, за результатом дослідження математичної моделі мостової залізобетонної плити та використання результатів статичних випробовувань отримано:

- значення механічної характеристики моста – інтегральну циліндричну жорсткість. Величина цього показника однозначно пов'язує зовнішнє статичне навантаження та силові фактори, що в результаті виникають.
- поверхневі графіки розподілу силових факторів.

Інтегральна циліндрична жорсткість та її відносна зміна у часі, яку можна виявити при повторному статичному випробовуванні, є корисною інформацією про залишковий ресурс експлуатації моста. Зростання інтегральної циліндричної жорсткості з часом вказуватиме на зростання силових факторів, що діють в середині конструкції. Спадання інтегральної циліндричної жорсткості з часом вказуватиме появу тріщин.

#### Література

1. Лучко Й.Й., Сулим Г.Т., Кириян В.І. Механіка руйнування мостових конструкцій та методи прогнозування залишкової довговічності. / За редакцією Й.Й. Лучка – Львів: Каменяр, 2004. – 885 с.
2. Лучко Й.Й., Коваль П.М., Корнієв М.М. і ін. Мости: Конструкції та надійність / За редакцією В.В. Панасюка і Й.Й. Лучка, – Львів: Каменяр, – 2005. – 989 с.
3. А. С. Моргун, І. А. Моргун. Дослідження зміни жорсткості через появу тріщин залізобетонних балок при статичних довготривалих навантаженнях. Вісник Вінницького політехнічного інституту, 2007, № 1.
4. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М: Госстройиздат, 1963. – 276 с.
5. Бондаренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков, 1968. – 210 с.
6. Моргун А. С. О вычислении  $\psi^*(t)$  с учетом возрастания нагрузки во времени // Вопросы строительства и архитектуры, вып.7. – Минск: Высшая школа, 1977. – С. 25-30.
7. Баженов В.А., Дашенко О.Ф., Коломієць Л.В., Ухов О.В. Будівельна механіка та металеві конструкції: Підручник. – Одеса: Астропринт, 2001. – 432 с.
8. Сулим Г.Т., Гурняк Л.І., Станкевич В.З. Числові методи в опорі матеріалів та їх програмне забезпечення. Навчальний посібник. – Луцьк: Вид-во ЛДТУ, 2006. – 147 с.
9. П.М. Коваль, А.Г. Походенько, Й.Й. Лучко, А.Є. Фаль. Випробування монолітного залізобетонного моста через р. Стара Ріка. / Зб. наук. пр. „Діагностика довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій”, Львів: Каменяр, – 2003. – Вип. 5. – С.72-84.