https://doi.org/10.36100/dorogimosti2019.19.149

УДК:517.912

Карабин О. О., *канд. фіз.-мат. наук, https://orcid.org/0000-0002-9287-376X*
Тацій Р. М., *д-р фіз.-мат. наук, професор, https://orcid.org/0000-0001-8805-6305*
Чмир О. Ю., *канд. фіз.-мат. наук, https://orcid.org/0000-0002-6340-9888*

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна

СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ КУСКОВО-СТАЛОГО ПЕРЕРІЗУ

Анотація

Вступ. Проектування будівельних конструкцій мостів пов'язане із математичним моделюванням коливальних процесів, що виникають в таких конструкціях. Такі математичні моделі описуються диференціальними рівняннями гіперболічного типу. Методи розв'язання таких задач поділяють на прямі та наближені. Основою прямих методів є метод відокремлення змінних, метод функції Гріна, метод інтегральних перетворень.

Постановка проблеми. Проблемою в таких задачах є проблема множення узагальнених функцій. В запропонованій схемі така проблема з узагальненими функціями усувається шляхом зведення диференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь та використання матричного числення.

Мета роботи. Одержання аналітичного вигляду розв'язку задачі поздовжніх коливань стрижня, що складається з чотирьох кусків кусково-сталого перерізу.

Методи вирішення. Запропонований метод вирішення задачі належить до прямих методів, які дозволяють отримати аналітичний вигляд розв'язку. В основу методу вирішення поставленої задачі покладено концепцію квазіпохідних, метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємозв'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку.

Результати роботи. Основним результатом роботи є аналітичний вигляд розв'язку задачі поздовжніх коливань стрижня що складається з чотирьох кусків кусково-сталого перерізу циліндричної форми та отримання необхідної кількості власних значень та власних функцій за допомогою програмного математичного пакету Maple.

Висновки. Отримані результати можуть бути використані в проектування будівельних конструкцій мостів та опор.

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, функція Дірака, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.

Вступ

В проектуванні будівельних конструкцій мостів обов'язковим є врахування коливних процесів, що виникають в їх опорах. Математичне моделювання коливних процесів пов'язане із розв'язуванням диференціальних рівнянь гіперболічного типу.

Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована у цій роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], метод зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, але взаємопов'язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур'є та модифікований метод власних функцій.

У роботі [2] розглянуто загальну схему дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної такої задачі для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду у функціях – коефіцієнтах задачі.

У роботі [3] розглядається гіперболічне рівняння з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами з найбільш загальними локальними крайовими умовами. Виділено випадок кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин, коли розв'язки вихідної задачі можуть бути отримано в замкненій формі.

В цій роботі досліджуються поздовжні коливання стрижня з чотирьох кусків кусково-сталого перерізу. За допомогою методу редукції дослідження зводиться до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

Основні позначення, формулювання задачі та допоміжні твердження

Нехай L – відкритий інтервал дійсної осі R, $[x_0; x_4] \subset L$ – відрізок дійсної осі; $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ – довільне розбиття відрізка $[x_0; x_4]$ дійсної осі Ox на дві частини.

Введемо основні позначення:

θ_i – характеристична функція проміжку $[x_i; x_{i+1})$, тобто $\theta_i(x) = \begin{cases} 1, x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, x \in [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$ $i = \overline{0,3}$.

Нехай $F_i, i = \overline{0,3}, E, \rho$ – сталі. Покладемо

$$F(x) = \sum_{i=0}^{3} F_i \cdot \theta_i .$$

Розглянемо рівняння поздовжніх коливань стрижня

$$\frac{\rho}{E} \cdot F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right), \; x \in (x_0;\, x_4), \; t \in (0;\, +\infty), \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \psi_0(t), \\ u(x_4, t) = \psi_1(t), \;\; t \in [0; +\infty) \end{cases} \tag{2}$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_4], \tag{3}$$

де $\psi_0(t), \psi_1(t) \in C^2(0, +\infty)$, $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(x_0;\, x_4)$.

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [4, 5]. Згідно з цим методом, розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t). \tag{4}$$

Одну з функцій, наприклад $w(x,t)$, сконструюємо спеціальним способом, тоді функцію $v(x,t)$ визначимо, використавши побудовану функцію $w(x,t)$.

Побудова функції $w(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$(F(x)\cdot w_x')_x' = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} w(x_0,t) = \psi_0(t), \\ w(x_4,t) = \psi_1(t), \end{cases} \quad t \in [0;+\infty). \tag{6}$$

Зауважимо, що змінна t тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (5), (6)лежить концепція квазіпохідних, викладена в [6].

Визначимо квазіпохідну функції $w(x,t)$, як добуток функції $F(x)$ та похідної по змінній x функції $w(x,t)$, тобто $w^{[1]} = F\cdot w_x'$. Введемо вектор $\overline{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$. За таких позначень квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{W}. \tag{7}$$

Під розв'язком системи (7) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною x справджує її майже скрізь (див. [6]).

Крайові умови (6) запишемо у векторній формі

$$P\cdot\overline{W}(x_0,t) + Q\cdot\overline{W}(x_4,t) = \overline{\Gamma}(t), \tag{8}$$

де $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x,t)$ та $w_i^{[1]}(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i;x_{i+1})$, $i = \overline{0,3}$. Покладемо

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{3} w_i(x,t)\theta_i. \tag{9}$$

На проміжках $[x_i;x_{i+1})$, $i = \overline{0,3}$ система (7) відповідно набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}_x' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Матриці Коші $B_i(x,s)$, $i=\overline{0,3}$ таких систем відповідно матимуть вигляд

$$B_i(x,s)=\begin{pmatrix}1 & b_i(x,s)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{де}\ b_i(x,s)=\int_s^x \frac{1}{F_i}dz=\frac{x-s}{F_i}. \tag{11}$$

Позначимо

$$B(x_1,x_0)\overset{def}{=}B_0(x_1,x_0),$$
$$B(x_2,x_0)\overset{def}{=}B_1(x_2,x_1)\cdot B_0(x_1,x_0),$$
$$B(x_3,x_0)\overset{def}{=}B_2(x_3,x_2)\cdot B_1(x_2,x_1)\cdot B_0(x_1,x_0),$$
$$B(x_4,x_0)\overset{def}{=}B_3(x_4,x_3)\cdot B_2(x_3,x_2)\cdot B_1(x_2,x_1)\cdot B_0(x_1,x_0). \tag{12}$$

Структура (11) матриць $B_i(x,s)$, $i=\overline{0,3}$ дає можливість встановити структуру матриць (12)

$$B(x_1,x_0)=\begin{pmatrix}1 & \frac{x_1-x_0}{F_0}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B(x_2,x_0)=\begin{pmatrix}1 & \frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$B(x_3,x_0)=\begin{pmatrix}1 & \frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}+\frac{x_3-x_2}{F_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$B(x_4,x_0)=\begin{pmatrix}1 & \frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}+\frac{x_3-x_2}{F_2}+\frac{x_4-x_3}{F_3}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

причому $B(x_i,x_i)\overset{def}{=}I$, $i=\overline{0,3}$,

де I – одинична матриця.

Розв'язки систем (10) на проміжках $[x_i;x_{i+1})$ відповідно мають вигляд

$$\overline{W}_i(x,t)=B_i(x,x_i)\cdot\overline{P}_i, \tag{13}$$

де $\overline{P}_i$, $i=\overline{0,3}$ – поки що невідомі вектори [1].

В точках $x=x_i$ повинні виконуватись умови спряження, а саме $\overline{W}_i(x_i,t)=\overline{W}_{i-1}(x_i,t)$ (див. [7]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення $\overline{P}_i=B_{i-1}(x_i,x_{i-1})\cdot\overline{P}_{i-1}$. Тоді, використовуючи (12), одержуємо

$$\overline{P}_i=B(x_i,x_0)\cdot\overline{P}_0,\ i=\overline{1,3}, \tag{14}$$

де $\overline{P}_0$ – початковий (невідомий) вектор.

Для знаходження $\overline{P}_0$ використаємо крайові умови (8), в яких покладемо $\overline{W}(x_0,t)\overset{def}{=}\overline{P}_0$.

Використовуючи (13) та (12), визначаємо

$$\overline{W}(x_4,t) \overset{def}{=} \overline{W}_3(x_4,t) = B_3(x_4,x_3)\overline{P}_3 = B_3(x_4,x_3)B(x_3,x_0)\overline{P}_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1-x_0}{F_0}+\frac{x_2-x_1}{F_1}+\frac{x_3-x_2}{F_2}+\frac{x_4-x_3}{F_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{P}_0 = B(x_4,x_0)\overline{P}_0 .$$

Підставимо визначені таким чином $\overline{W}(x_0,t)$ та $\overline{W}(x_4,t)$ в крайові умови (8) в результаті чого вони набудуть вигляду $[P+Q\cdot B(x_4,x_0)]\overline{P}_0 = \overline{\Gamma}$, звідки одержуємо

$$\overline{P}_0 = [P+Q\cdot B(x_4,x_0)]^{-1}\cdot\overline{\Gamma}. \tag{15}$$

Виконавши дії над матрицями, визначаємо, що

$$[P+Q\cdot B(x_4,x_0)]^{-1} = \frac{1}{\sum_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}}\cdot\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Підставимо (16) у (15) та (14)

$$\overline{P}_0 = \frac{1}{\sum_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}}\cdot\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\cdot\psi_0(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\overline{P}_i = \frac{1}{\sum_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}}\cdot\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\psi_0(t)-\sum_{m=0}^{i-1}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\psi_0(t)+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\psi_1(t) \\ -\psi_0(t)+\psi_1(t) \end{pmatrix},$$

$$i = \overline{1,3}. \tag{18}$$

На основі формул (13), (18) після перетворень отримаємо вектор - функції $\overline{W}_i(x,t)$, $i=\overline{0,3}$ на проміжках $[x_i;x_{i+1})$, відповідно:

$$\overline{W}_0(x,t)=\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}}\begin{pmatrix}1 & \frac{x-x_0}{F_0}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\cdot\psi_0(t)\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}}\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\cdot\psi_0(t)+\frac{x-x_0}{F_0}(-\psi_0(t)+\psi_1(t))\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix}$$

$$\overline{W}_i(x,t)=\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{3}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\psi_0(t)-\sum\limits_{m=0}^{i-1}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\psi_0(t)+\sum\limits_{m=0}^{i-1}\frac{x_{m+1}-x_m}{F_m}\psi_1(t)+\frac{x-x_i}{F_i}(-\psi_0(t)+\psi_1(t))\\ -\psi_0(t)+\psi_1(t)\end{pmatrix},$$

$$i=\overline{1,3}. \qquad (19)$$

Перші координати векторів $\overline{W}_i(x,t)$, $i=\overline{0,3}$ в (19) є шуканими функціями $w_i(x,t)$ відповідно. Підставляючи їх у (9), отримуємо розв'язок на всьому проміжку $[x_0;x_4]$.

Побудова функції $v(x,t)$

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (4) в (1) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (5), одержуємо неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ x\in(x_0;x_4),\ t\in(0;+\infty). \qquad (20)$$

Підставимо (4) в початкові умови (3). Одержимо для функції $v(x,t)$ початкові умови

$$\begin{cases}v(x,0)=\Phi_0(x),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\Phi_1(x),\end{cases}\quad x\in[x_0;x_4], \qquad (21)$$

де $\Phi_0(x)\overset{def}{=}\varphi_0(x)-w(x,0)$, $\Phi_1(x)\overset{def}{=}\varphi_1(x)-\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (6), то із (4) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases}v(x_0,t)=0,\\ v(x_4,t)=0,\end{cases}\quad t\in[0;+\infty). \qquad (22)$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (5), (6) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (20) – (22).

Метод Фур'є та задача на власні значення

Для рівняння (20) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{23}$$

з крайовими умовами (22).

Його нетривіальні розв'язки шукаємо у вигляді

$$v(x,t)=\sin(\omega t+\varepsilon)\cdot X(x), \tag{24}$$

де ω – параметр,

ε – константа,

$X(x)$ – невідома функція.

Підставимо (24) в рівняння (23). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$\left(F(x)X'(x)\right)'+\alpha^2F(x)X(x)=0, \tag{25}$$

де $\alpha^2=\dfrac{\rho}{E}\cdot\omega^2$.

Підставимо (24) в умови (22). Одержимо крайові умови

$$\begin{cases}X(x_0)=0,\\ X(x_4)=0.\end{cases} \tag{26}$$

Під розв'язком рівняння (25) розуміємо абсолютно-неперервну на $[x_0;x_4]$ функцію $X(x)$, що справджує його майже скрізь [6].

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]}\overset{def}{=}FX'$, вектор $\overline{X}=\begin{pmatrix}X\\ X^{[1]}\end{pmatrix}$ та матрицю $A=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{F}\\ -\alpha^2F & 0\end{pmatrix}$, запишемо задачу (25) – (26) у матричному вигляді

$$\overline{X}'=A\cdot\overline{X}, \tag{27}$$

$$P\overline{X}(x_0)+Q\overline{X}(x_4)=\overline{0}. \tag{28}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриці Коші $B_i(x,s,\omega)$ системи (27) відповідно на проміжках $[x_i;x_{i+1})$ мають вигляд

$$\mathrm{B}_i(x,s,\omega)=\begin{pmatrix}\cos\alpha(x-s) & \dfrac{\sin\alpha(x-s)}{F_i\alpha}\\ -F_i\alpha\sin\alpha(x-s) & \cos\alpha(x-s)\end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця (аналог матриці Коші на всьому проміжку) системи (27) має структуру

$$B(x,x_0,\omega)\overset{def}{=}\sum_{i=0}^{3}B_i(x,x_i,\omega)\cdot B(x_i,x_0,\omega)\cdot\theta_i, \tag{29}$$

де, аналогічно, як і в формулі (12),

$$B(x_i, x_0, \omega) \overset{def}{=} \prod_{j=0}^{i} B_{i-j}, \left(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega\right), \quad i = \overline{0,3}.$$

Позначимо також

$$B(x, x_0, \omega) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x, \omega)$ системи (27) шукаємо у вигляді, $\overline{X}(x, \omega) = B(x, x_0, \omega) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор-функція $\overline{X}(x, \omega)$ має задовольняти крайові умови (28), тобто

$$[P \cdot B(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot B(x_4, x_0, \omega)] \cdot \overline{C} = \overline{0},$$

врахувавши, що $B(x_0, x_0, \omega) = I$, прийдемо до рівності

$$[P + Q \cdot B(x_4, x_0, \omega)] \cdot \overline{C} = \overline{0}. \tag{31}$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (31) необхідно і досить виконання умови

$$\det[P + Q \cdot B(x_4, x_0, \omega)] = 0. \tag{32}$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (32), врахувавши вигляд матриць P, Q та (30)

$$\det [P + Q \cdot B(x_4, x_0, \omega)] = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \end{pmatrix}\right] = b_{12}(\omega).$$

.

Сформулюємо наступне твердження.

Твердження 1. *Характеристичне рівняння задачі на власні значення* (25), (26) *має вигляд*

$$b_{12}(\omega) = 0. \tag{33}$$

Як відомо (див. [8]), корені ω_k характеристичного рівняння (33), які є власними значеннями задачі (25), (26), є додатними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (31) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ b_{11}(\omega_k) \cdot C_1 + b_{12}(\omega_k) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Оскільки виконується (33), то $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\overline{X}_k(x,\omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k, Справедливим є твердження.

Твердження 2. *Власні вектори системи диференціальних рівнянь* (27) *з крайовими умовами* (28) *мають структуру*

$$\overline{X}_k(x,\omega_k) = B(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C}, \qquad k \in N$$

Наслідок. *Власні функції* $X_k(x,\omega_k)$*, як перші координати власних векторів* $\overline{X}_k(x,\omega_k)$*, можна записати у вигляді*

$$X_k(x,\omega_k) = (1 \quad 0)\cdot B(x,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\ k = 1,2,3,.... \tag{35}$$

Зокрема, оскільки

$$X_k(x,\omega_k) = \sum_{i=0}^{3} X_{k\,i}(x,\omega_k)\cdot\theta_i\,, \tag{36}$$

то з (29) та (35) випливає, що

$$X_{k\,i}(x,\omega_k) = (1 \quad 0)\cdot B_i(x,x_i,\omega_k)\cdot B(x_i,x_0,\omega_k)\cdot\overline{C},\ i = \overline{0,3}\,. \tag{37}$$

Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (20) – (22)

Для розв'язання задачі (20) – (22) застосуємо метод власних функцій [5], який полягає в тому, що розв'язок задачі (20) – (22) шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\,, \tag{38}$$

де $T_k(t)$ – поки що невідомі функції.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ входить в праву частину рівняння (20), то розкладеио її в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ крайової задачі (25), (26)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\,. \tag{39}$$

Підставляючи вираз (38) у (20) та враховуючи (39), отримаємо рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(t)\cdot\left(F(x)\cdot X_k{}'(x,\omega_k)\right)' - \frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot T_k{}''(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\right] = \frac{\rho}{E}\cdot F(x)\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)$$

.

Враховуючи, що власні функції $X_k(x,\omega_k)$ задовольняють рівняння (25), приходимо до рівності

$$-\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[\omega_k^2\cdot T_k(t) + T_k{}''(t)\right]\cdot X_k(x,\omega_k) = \frac{\rho}{E}\cdot F(x)\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x,\omega_k)\,.$$

Прирівнюємо коефіцієнти Фур'є

$$T_k{}''(t) + \omega_k^2\cdot T_k(t) = -w_k(t)\,,\ k = 1,2,3,.... \tag{40}$$

Загальний розв'язок кожного з диференціальних рівнянь (40) має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\omega_k t + d_k \sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\,, \tag{41}$$

де a_k, d_k – невідомі сталі [9].

Позначимо $I(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds$. Зауважимо, що $I(0)=0$, $I_t'(0)=0$ [10].

Для визначення сталих a_k, d_k розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ праві частини початкових умов (21)

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)\,, \tag{42}$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)\,, \tag{43}$$

де $\Phi_{0\,k}$, $\Phi_{1\,k}$ – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (41) випливає, що

$$T_k(0) = a_k\,, \tag{44}$$

$$T_k'(t) = -a_k\omega_k \sin\omega_k t + d_k\omega_k \cos\omega_k t - I_t'(t)\,,$$

звідки

$$T_k'(0) = d_k\omega_k\,. \tag{45}$$

З (38), першої умови в (21), та врахувавши (42), одержуємо

$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (44), маємо

$$T_k(0) = a_k = \Phi_{0\,k}\,.$$

Аналогічно з (38), другої умови в (21), врахувавши (43), маємо

$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)\cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1\,k}\cdot X_k(x,\omega_k)$. Звідки, використовуючи (45), знаходимо

$$T_k'(0) = d_k\omega_k = \Phi_{1\,k}\,, \text{ або } d_k = \frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\,.$$

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (20) – (22) у вигляді ряду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_k(x,\omega_k)\,.$$

Враховуючи (36) та те, що $v(x,t) = \sum_{i=0}^{3} v_i(x,t)\cdot\theta_i$, де $v_i(x,t)$ визначені відповідно на проміжках $[x_i; x_{i+1})$, одержуємо

$$v_i(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0\,k}\cos\omega_k t+\frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right]\cdot X_{k\,i}(x,\omega_k),\qquad(46)$$

де функції $X_{k\,i}(x,\omega_k)$ обчислюються за формулою (37).

Врахувавши перші координати векторів $\overline{W}_i(x,t)$ в (19) та (46), отримаємо розв'язок задачі (1) – (3)

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{3}(w_i(x,t)+v_i(x,t))\cdot\theta_i\,.$$

Застосування пакета Maple до знаходження власних значень та власних функцій задачі (27) – (28)

Сучасні програмні засоби дають змогу отримати необхідну кількість власних значень та власних функцій, що забезпечує відповідну точність розв'язку. Розглянемо результат застосування пакету Maple для отримання розв'язку поставленої задачі. Для прикладу розглянемо сталевий стрижень довжиною 1 м, що складається з чотирьох циліндричних кусків однакової довжини, площі поперечних перерізів яких відповідно становлять $F_0=0,0025\pi$ м^2, $F_1=0,000625\pi$, $F_2=0,0009\pi$, $F_3=0,0001\pi$ м^2. За таких умов $x_0=0$, $x_1=0,25$, $x_2=0,5$, $x_3=0,75$, $x_4=1$. Модуль Юнга для сталі становить E=203943242590 Н/м^2, густина $\rho=7900$ кг/м^3. Обчислено перші одинадцять власних значень та власних функцій:

Знаходження перших одинадцяти ω_k

```
> ω[1] := NextZero(ω → b[12](ω), 0, guardDigits = 500, maxdistance = 1000000000000); for k from 1 to 10 do ω[k+1]
      := NextZero(ω → b[12](ω), ω[k], guardDigits = 500, maxdistance = 10000000000000) od
```

$$\omega_1 := 4314.3455$$
$$\omega_2 := 10095.341$$
$$\omega_3 := 15876.336$$
$$\omega_4 := 20190.682$$
$$\omega_5 := 24505.027$$
$$\omega_6 := 30286.022$$
$$\omega_7 := 36067.018$$
$$\omega_8 := 40381.363$$
$$\omega_9 := 44695.709$$
$$\omega_{10} := 50476.704$$
$$\omega_{11} := 56257.699$$

Знаходження перших одинадцяти власних функцій $X_{k\,0}$

$$> \ evalm\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]\&*Matrix\left(\left[\left[\cos\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right),\ \frac{\sin\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right)}{\alpha\cdot F_0}\right],\left[-\alpha\cdot F_0\cdot\sin\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right),\ \cos\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right)\right]\right]\right)$$

$$\&*\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\Bigg) : Y_{k0} := evalf\left(subs\left(s=x_0,\%\right)\right);$$

$$Y_{k0} := \frac{127.32395\,\sin\left(\alpha\,x\right)}{\alpha}$$

$$> \ \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 11 \textbf{ do } X_{k,\,0} := subs\left(\alpha=\alpha_k,\ Y_{k0}\right) \textbf{ od}$$

$$X_{1,\,0} := 47.417243\,\sin(2.6851825\,x)$$
$$X_{2,\,0} := 20.264236\,\sin(6.2831855\,x)$$
$$X_{3,\,0} := 12.885491\,\sin(9.8811880\,x)$$
$$X_{4,\,0} := 10.132118\,\sin(12.566371\,x)$$
$$X_{5,\,0} := 8.3482613\,\sin(15.251553\,x)$$
$$X_{6,\,0} := 6.7547453\,\sin(18.849556\,x)$$
$$X_{7,\,0} := 5.6720622\,\sin(22.447559\,x)$$
$$X_{8,\,0} := 5.0660590\,\sin(25.132741\,x)$$
$$X_{9,\,0} := 4.5770472\,\sin(27.817924\,x)$$
$$X_{10,\,0} := 4.0528473\,\sin(31.415926\,x)$$
$$X_{11,\,0} := 3.6363799\,\sin(35.013929\,x)$$

Знаходження перших одинадцяти власних функцій $X_{k\,1}$

$$> \ evalm\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]\&*Matrix\left(\left[\left[\cos\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right),\ \frac{\sin\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right)}{\alpha\cdot F_1}\right],\left[-\alpha\cdot F_1\cdot\sin\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right),\ \cos\left(\alpha\cdot\left(x-s\right)\right)\right]\right]\right)\&*B$$

$$\&*\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\Bigg) : Y_{k1} := evalf\left(subs\left(s=x_1,\%\right)\right);$$

$$Y_{k1} := \cos\left(\alpha\,\left(x-0.25000000\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2}}\left(2.0457438\,10^5\left(\left(\cos\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)\right)^2\right.\right.\right.$$

$$\left.-\ 9.0000000\,\sin\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)^2\right)\cos\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)$$

$$\left.\left.-\ 6.9444444\,\cos\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)\sin\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)^2\right)\sin\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2}}\left(8.1829752\,10^5\left(\cos\left(0.00015559616\,\sqrt{\omega^2}\right)\right)^2\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- 9.0000000 \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2\Big) \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)\Big) \\
&+ \frac{5.6826217\,10^6 \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2 \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)}{\sqrt{\omega^2}}\Bigg) \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)\Bigg) \\
&+ \frac{1}{\alpha}\Bigg(509.29581 \sin(\alpha\,(x - 0.25000000))\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2}}\left(2.0457438\,10^5\left(\right.\right.\right. \\
&-0.0000019552791 \sqrt{\omega^2} \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right) \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2 - 0.0000012220495\left(\right. \\
&-0.11111111 \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2 + \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2\Big) \sqrt{\omega^2} \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)\Big) \\
&\sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)\Big) + \Big(-1.6000000 \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right) \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2 + \Big(\\
&-0.11111111 \sin\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2 + \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)^2\Big) \cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)\Big) \\
&\cos\left(0.00015559616 \sqrt{\omega^2}\right)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&> \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 11 \textbf{ do } X_{k,1} := evalf\left(subs\left(\alpha = \alpha_k,\ \omega = \omega_k,\ Y_{kl}\right)\right) \textbf{ od} \\
&X_{1,1} := 0.00006 \cos(2.6851825\,x - 0.67129562) - 34.140411 \sin(2.6851825\,x - 0.67129562) \\
&X_{2,1} := -0.000028204696 \cos(6.2831855\,x - 1.5707964) + 2.2515818 \sin(6.2831855\,x - 1.5707964) \\
&X_{3,1} := 0.000073 \cos(9.8811880\,x - 2.4702970) - 9.2775657 \sin(9.8811880\,x - 2.4702970) \\
&X_{4,1} := -0.000017797616 \cos(12.566371\,x - 3.1415928) + 40.528472 \sin(12.566371\,x - 3.1415928) \\
&X_{5,1} := 0.000060 \cos(15.251553\,x - 3.8128882) - 6.0107383 \sin(15.251553\,x - 3.8128882) \\
&X_{6,1} := -0.000098379001 \cos(18.849556\,x - 4.7123890) + 0.75052731 \sin(18.849556\,x - 4.7123890) \\
&X_{7,1} := 0.000045 \cos(22.447559\,x - 5.6118898) - 4.0838923 \sin(22.447559\,x - 5.6118898) \\
&X_{8,1} := -0.000051008451 \cos(25.132741\,x - 6.2831852) + 20.264237 \sin(25.132741\,x - 6.2831852) \\
&X_{9,1} := 0.000042 \cos(27.817924\,x - 6.9544810) - 3.2954669 \sin(27.817924\,x - 6.9544810) \\
&X_{10,1} := -0.000070309279 \cos(31.415926\,x - 7.8539815) + 0.45031640 \sin(31.415926\,x - 7.8539815) \\
&X_{11,1} := 0.0000663 \cos(35.013929\,x - 8.7534822) - 2.6182045 \sin(35.013929\,x - 8.7534822)
\end{aligned}
$$

Знаходження перших одинадцяти власних функцій $X_{k\,2}$

$$
\begin{aligned}
&> evalm\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right] \&* Matrix\left(\left[\left[\cos\left(\alpha\cdot(x-s)\right), \frac{\sin\left(\alpha\cdot(x-s)\right)}{\alpha\cdot F_2}\right], \left[-\alpha\cdot F_2\cdot\sin\left(\alpha\cdot(x-s)\right), \cos\left(\alpha\cdot(x-s)\right)\right]\right]\right) \&* B \\
&\quad \&* \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\Bigg) : Y_{k2} := evalf\left(subs\left(s = x_2, \%\right)\right) :
\end{aligned}
$$

```
> for k from 1 to 11 do X[k,2] := evalf(subs(α = α[k], ω = ω[k], Y[k2])) od
```

$$X_{1,2} := 0.00006\cos(2.6851825\,x - 1.3425912) - 23.708617\sin(2.6851825\,x - 1.3425912)$$

$$X_{2,2} := -0.000028204696\cos(6.2831855\,x - 3.1415928) + 1.5635985\sin(6.2831855\,x - 3.1415928)$$

$$X_{3,2} := 0.000073\cos(9.8811880\,x - 4.9405940) - 6.4427540\sin(9.8811880\,x - 4.9405940)$$

$$X_{4,2} := -0.000017797616\cos(12.566371\,x - 6.2831855) + 28.144771\sin(12.566371\,x - 6.2831855)$$

$$X_{5,2} := 0.000060\cos(15.251553\,x - 7.6257765) - 4.1741237\sin(15.251553\,x - 7.6257765)$$

$$X_{6,2} := -0.000098379001\cos(18.849556\,x - 9.4247780) + 0.52119950\sin(18.849556\,x - 9.4247780)$$

$$X_{7,2} := 0.000045\cos(22.447559\,x - 11.223780) - 2.8360362\sin(22.447559\,x - 11.223780)$$

$$X_{8,2} := -0.000051008451\cos(25.132741\,x - 12.566370) + 14.072386\sin(25.132741\,x - 12.566370)$$

$$X_{9,2} := 0.000042\cos(27.817924\,x - 13.908962) - 2.2885186\sin(27.817924\,x - 13.908962)$$

$$X_{10,2} := -0.000070309279\cos(31.415926\,x - 15.707963) + 0.31271972\sin(31.415926\,x - 15.707963)$$

$$X_{11,2} := 0.0000663\cos(35.013929\,x - 17.506964) - 1.8181975\sin(35.013929\,x - 17.506964)$$

Знаходження перших одинадцяти власних функцій $X_{k\,3}$

```
> evalm([1 0]&*Matrix([[cos(α·(x − s)), sin(α·(x − s))/(α·F3)], [−α·F3·sin(α·(x − s)), cos(α·(x − s))]])&*B
  &*[0, 1]) : Yk3 := evalf(subs(s = x3, %)) :
```

Висновки

Теорему про розвинення за власними функціями адаптовано для випадку диференціальних рівнянь з кусково-сталими (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду згаданих вище коефіцієнтів.

Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку.

Такий підхід дає змогу застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку. Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

Наведено приклад застосування пакету Maple до знаходження власних значень та власних функцій задачі коливання сталевого стрижня довжиною 1 м, що складається з чотирьох кусків однакової довжини.

Список літератури

1. Тацій Р. М, Власій О. О., Стасюк М. Ф. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами. *Вісник НУ «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки».* Львів, 2014. N 804. С. 64-69.

2. Тацій Р. М., Карабин О. О., Чмир О. Ю. Загальна схема дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделюваня» (14-19 травня 2018 р. м. Івано-Франківськ). Івано-Франківськ, 2018. С. 386-391.

3. Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О. Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними коефіцієнтами та правими частинами. *Дослідження в математиці і механіці*. Одеса, 2017. Том. 22. Вип. 2(30). С. 55-70. URL: http://liber.onu.edu.ua/pdf/rmm_2017_2(30).pdf (дата звернення: 21.03.2019).

4. Арсенин В. Я. Методы математической физики. Москва, 1974. 432 с.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва, 1977. 735 с.

6. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В, Власій О. О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Дрогобич, 2011. 297 с.

7. Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами. *Вісник НУ «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки».* Львів, 2009. N 660. С. 34-38.

8. Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. Львів, 2001. Том 44. N 1 С. 43-53.

9. Каленюк П. І., Рудавський Ю. К., Тацій Р. М., Клюйник І. Ф., Колісник В. М., Костробій П. П., Олексів І. Я. Диференціальні рівняння: навч. посібник. Львів, 2014. 380 с.

10. Мартыненко В. С. Операционное исчисление: уч. пос. Київ, 1990. 359 с.

REFERENCES

1. Tatsij R. M., Vlasij O. O., Stasjuk M. F. Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy. *Bulletin of the University «Lviv Polytechnic». Series «Physics and mathematics»*. Lviv, 2014. N 804. P. 64-69 [in Ukrainian].

2. Tatsij R. M., Chmyr O. Yu., Karabyn O. O. Zagalna schema doslidzhennya pozdovzhnikh kolyvan stryzhniv kuskovo-stalogo pererizu. The materials of the international scientific conference «Information technologies and computer modelling» (14-19 may 2018, Ivano-Frankivsk) Ivano-Frankivsk, 2018. P. 386-391 [in Ukrainian].

3. Tatsij R. M., Chmyr O. Yu., Karabyn O. O. The total boundary value problems for hiperbolic equation with piecewise continuous coefficients and right parts. *Researches in mathematics and mechanics.* Odesa, 2017. Book 22. N 2(30). P. 55-70. URL: http://liber.onu.edu.ua/pdf/rmm_2017_2(30).pdf (Last accessed: 21.03.2019) [in Ukrainian].

4. Arsenin V. Ya. Metodyi matematicheskoy fiziki (Methods of mathematical physics). Moscow, 1974. 432 p. [in Russian].

5. Tihonov A. N., Samarskiy A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki (Mathematical physics equations). Moscow, 1977. 735 p. [in Russian].

6. Tatsii R. M., Stasiuk M. F., Mazurenko V. V, Vlasii O. O. Uzahalneni kvazidyferentsialni rivniannia (Generalized quasi-differential equations). Drogobych (Ukrainian), 2011. 297 p. [in Ukrainian].

7. Tatsii R. M., Mazurenko V. V. Dyskretno-neperervni kraiovi zadachi dlia kvazidyferentsialnykh rivnian parnoho poriadku (Discrete-continuous boundary value problems for quasi-differential equations of even order). *Bulletin of the University «Lviv Polytechnic». Series «Physics and mathematics»*. Lviv, 2009. N 660. P. 34-38 [in Ukrainian].

8. Tatsij R. M., Mazurenko V. V. Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlya kvazi-dyfererentsialykh rivnyan dovilnogo poryadku (Discrete-continuous boundary value problems for quasi-differential equations of even order). *Matematičeskie metody i fiziko-mehaničeskie polâ*. Lviv, 2001. Book 44. N 1. P. 43-53. [in Ukrainian].

9. Kaleniuk P. I., Rudavskyi Yu. K., Tatsii R. M., Kliuinyk I. F., Kolisnyk V. M., Kostrobii P. P., Oleksiv I. Ya. Dyferentsialni rivniannia (Differential equations): tutorial. Lviv, 2014. 380 p. [in Ukrainian].

10. Martyinenko V. S. Operatsionnoe ischislenie (Operational calculus): tutorial. Kyiv, 1990, 359 p. [in Russian].

Oksana Karabyn, *Ph.D. in Physics and Maths, https://orcid.org/0000-0002-9287-376X*
Roman Tatsii, *D.Sc. in Physics and Maths, Professor, https://orcid.org/0000-0001-8805-6305*
Oksana Chmyr, *Ph.D. in Physics and Maths, https://orcid.org/0000-0002-6340-9888*

Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine

THE SCHEME FOR INVESTIGATION FOR LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF ROD OF A PIECEWISE-CONSTANT SECTION

Introduction. Design of bridges' constructional structures relates to the mathematical modeling of oscillatory processes that arise in such structures. Such mathematical models are described by differential equations of hyperbolic type. Methods of solving such problems are divided into direct and approximate. The basis of direct methods is the method of separating variables, the Green's method of function, the method of integral transformations.

Problem statement. An issue in these tasks is the problem of multiplying the generalized functions. In the proposed scheme, this problem with generalized functions is eliminated by reducing the differential equation to the system of differential equations and using the matrix calculation.

Purpose. The purpose of work is to obtain analytical form of solution of the problem of longitudinal vibrations of a rod consisting of four fragments of piecewise-constant section.

Methods. The proposed method of problem solving belongs to direct methods, which allow getting an analytical form of solution. The basis for solving the task includes the concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a modified method of autofunctions. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine the obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem.

Results. The main result of the work is analytical presentation the problem of longitudinal oscillations of the rod consisting of four parts of piecewise-stable section of cylindrical shape and obtaining the required number of its own values and its functions with the help of Software mathematical Package Maple.

Conclusion. The obtained results can be used in designing of building structures of bridges and supports.

Key words: quasi-fferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the Dirac function, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of autofunctions